
Домашнее задание №10

Задача №1. (Гл. 1, №122)

Книга объёмом 500 страниц содержит 50 опечаток. Оцените вероятность того, что на случайно выбранной странице имеется не менее трёх опечаток, используя нормальное и пуассоновские приближения. Сравните результаты с истинным значением.

Задача №2.

Пусть дана последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределённых невырожденных случайных величин с конечными дисперсиями. Пусть $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$. Докажите, что для любых $a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{a \leq \eta_n \leq b\} = 0.$$

Задача №3.

Пусть дана последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимых одинаково распределённых невырожденных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Докажите, что

$$\eta_n = \sqrt{n} \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad \zeta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \mathcal{N}(0, 1).$$

Указание. Докажите вспомогательное утверждение: если $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi$, $\mathbb{E}\xi = 0$, $\mathbb{D}\xi = 1$ и $\eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1$, то

$$\xi_n \eta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi.$$