# Домашнее задание №9

**Задача №1.** (Гл. 1, №115)

Пусть $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность случайных величин с дисперсиями $\sigma_i^2$. Докажите, что если все корреляционные моменты (корреляции) $R_{ij}$ случайных величин $X_i$ и $X_j$ неположительны и $\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, то для последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполняется закон больших чисел.

**Задача №2.** (Гл. 1, №118)

Приведите пример последовательности независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\xi_1+\ldots\xi_n}{n}$ существует по вероятности, но не существует с вероятностью 1.

**Задача №3.** (Биржевой парадокс, Гл. 2, №37)

Рассмотрим любопытный экономичсекий пример. Пусть имеется начальный капитал $K_1$, который требуется увеличить. Для этого имеется две возможности: вкладывать деньги в надёжный банк и покупать на бирже акции некоторой компании. Пусть $u$ — доля капитала, вкладываемая в банк, а $v$ — доля капитала, расходуемая на приобретение акций ($0 \leqslant u+v \leqslant 1$). Предположим, что банк гарантирует $b\times 100\%$ годовых, а акции приносят $X \times 100\%$ годовых, где $X$ — случайная величина с математическим ожиданием $\mathbb{E}X = m_X > b > 0$. Таким образом, через год капитал составит величину $K_2 = K_1(1 + bu + Xv)$. Очевидно, что если придерживаться стратегии, максимизирующей средний доход за год, то выгодно присвоить следующие значения: $u = 0, v = 1$.

Рассмотрите прирост капитала $K_{t+1}$ за $t$ лет, считая $X_1, \ldots, X_t$ независимыми случайными величинами. Покажите, что при ежегодном вложении капитала в акции

$$\mathbb{E}\left[K_t\right] \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty,$$

но при этом в случае $\mathbb{E}\left[\ln(1+X)\right] < 0$

$$K_t \xrightarrow[t\to\infty]{\text{п.н.}} 0.$$

Приведите пример такой случайной величины X.

*Указание.* Воспользуйтесь усиленным законом больших чисел для последовательности $\ln(1 + X_t)$.