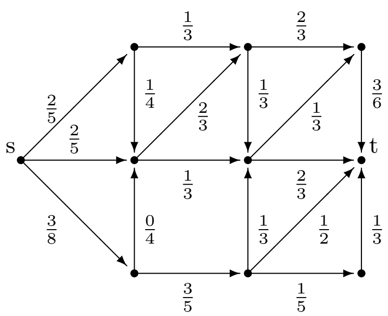
Домашнее задание №12

Дедлайн: 07 мая 2019 г., 23:00

Основные задачи

1. ($3\times1+2+1$ балла) На рисунке изображен потоковый граф (метка $\frac{f}{u}$ на ребре означает поток и пропускную способность, соответственно).



   (i) Чему равен поток f?

   (ii) Изобразите остаточный граф, соответствующий потоку f.

   (iii) Максимален ли поток f?

   (iv) В следующих двух пунктах нужно по шагам применить метод[1] Форда-Фалкерсона, доведя его до алгоритма. **При отсутствии алгоритма (например, если увеличивающие пути находятся методом “внимательного рассмотрения” потокового графа или если разрез просто отгадывается) задача не оценивается.** ***Это требование будет тем более актуально при написании тестов.***

   Метод остаточных графов из книг **[Кормен 1]** или **[Кормен 2]** аналогичен оригинальному методу пометок Форда-Фалкерсона, изложенному в их книге

   С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона по шагам найдите максимальный поток. На каждом шаге должен быть построен остаточный граф и указан увеличивающий путь.

   (v) Укажите модификацию алгоритма Форда-Фалкерсона для нахождения минимального разреза. По шагам постройте минимальный разрез между s и t. Найдите его пропускную способность.

2. ($2 + 1$ балла) В больнице каждому из 169 пациентов нужно перелить по *одной дозе* крови. В наличии имеется 170 доз. Распределение по группам таково.

Группа	I	II	III	IV
В наличии	45	32	38	55
Запрос	42	39	38	50

   При этом пациенты, имеющие кровь группы I, могут получать только кровь группы I. Пациенты, имеющие кровь группы II (группы III), могут получать только кровь групп I и II (групп I и III, соответственно). Наконец, пациенты с IV группой могут получать кровь любой группы.

   (i) Распределите дозы, чтобы обслужить максимальное число пациентов с помощью *решения подходящей задачи о максимальном потоке.* Решение нужно аккуратно оформить: должна быть нарисована потоковая сеть и показаны все шаги алгоритма ФФ, начиная с нулевого потока, т. е. должны быть построены остаточные графы и показаны увеличивающие пути.

   (ii) Если всех пациентов обслужить нельзя, то приведите *простое* объяснение этому, *доступное администрации* больницы.

[1] Отметим, что выражение “метод” употребляется не случайно (некоторые этапы описаны неявно или подразумеваются). **Вы должны самостоятельно придумать, как дополнить процедуру до алгоритма.**

3. $(1+2$ балла$)$

Рассмотрим следующую задачу Сеть. Дан ориентированный граф $G=(V,E)$, дугам которого приписаны неотрицательные числа $l_i \leq u_i$, $i \in E$. Нужно проверить, можно ли приписать ребрам числа $F=\{f_i,\, i \in E\}$, чтобы в любой вершине v была нулевая дивергенция $div\, F = \sum_{\text{по входящим в v ребрам}} f_i - \sum_{\text{по выходящим из v ребрам}} f_j = 0$ и выполнялись неравенства $l_i \leq f_i \leq u_i, i \in E$.

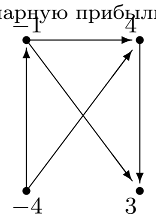
Покажите, как можно решить задачу Сеть с помощью решения подходящей задачи о максимальном потоке в сети и наоборот.

4. (1 балл) Рассмотрим следующую задачу. В потоковой сети нет ограничений пропускной способности на дугах, но есть ограничения пропускной способности вершин. Формально, для каждой вершины v, отличной от истока и стока, задано целое неотрицательное число $c(v)$, и для потока в сети должно выполняться

$$\sum_u f(u,v) = \sum_u f(v,u) \leq c(v).$$

Опишите алгоритм нахождения максимального потока в такой сети.

5. $(2+1+2$ балла$)$ Последовательность выполнения проектов задана ациклическим орграфом $G=(V,E)$ (если в орграфе есть ребро (u,v), то проект v не может начаться, пока не будет выполнен проект u). Выполнение проекта v приносит прибыль $p(v)$ (она может быть и отрицательна). Требуется выбрать подмножество проектов, приносящих максимальную суммарную прибыль, т. е. найти такое подмножество проектов $M \subseteq V$, что $M = argmax_{S \subseteq V}\{p(S) \overset{def}{=} \sum_{v \in S} p(v)\}$.



Оказывается, что эту задачу можно свести к задаче о минимальном разрезе. **Конструкция.** *Дополняем граф G источником s и стоком t, и задаем* **бесконечные** *пропускные способности на ребрах G. Далее, для всех вершин $v \in V$, если $p(v) < 0$, то задаем ребро (s,v) с пропускной способностью $-p(v)$, а если $p(v) > 0$, то задаем ребро (v,t) с пропускной способностью $p(v)$.*

(i) С помощью алгоритма Форда-Фалкерсона найдите максимальный поток в полученной сети. Начальный поток нулевой. Приведите подробное описание: на каждом шаге процедуры на вспомогательных чертежах изобразите остаточные графы и укажите увеличивающие пути.

(ii) Затем, используя алгоритм Форда-Фалкерсона, найдите минимальный разрез.

(iii) Обоснуйте конструкцию в общем случае.