Домашнее задание №10-11

Дедлайн: 30 апреля 2019 г., 23:00

Основные задачи

1. (2 + 1 балла)

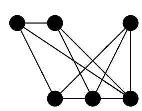
   (i) Докажите или опровергните, что следующее условие дает критерий, когда остовное дерево $F \subseteq G$ является *деревом некоторого поиска в ширину* связного неориентированного графа G.

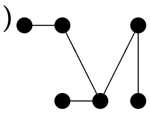
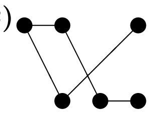
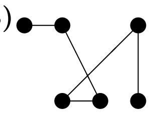
   Остовное дерево $T \subseteq G$ является деревом некоторого поиска в ширину связного неориентированного графа G, если и только если в нем можно выбрать одну из вершин s за корень так, чтобы T было деревом кратчайших путей из s в графе G. Иными словами, путь по дереву из s в произвольную вершину t содержит не больше ребер, чем кратчайший путь между s и t в G.

   Если в настоящем виде критерий неверен, то модифицируйте его до корректного.

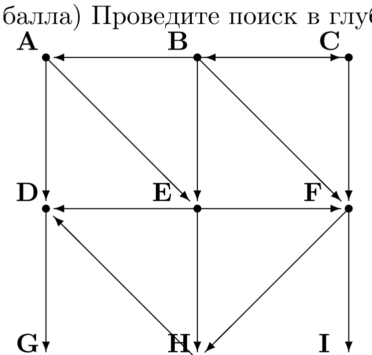
   (ii) В соответствии с полученным в предыдущем пункте критерием установите, какие из нарисованных деревьев являются деревьями поиска в ширину.

   Формат ответа. Пусть, скажем, критерий верен, тогда при положительном ответе нужно указать корень дерева кратчайших путей, а при отрицательном — для каждого возможного выбора корня нужно указать вершину, расстояние которой до корня в графе меньше, чем соответствующее расстояние по дереву.

G)


1)

2)

3)


2. (2 балла) Проведите поиск в глубину в графе на рисунке.



   Используйте алфавитный порядок вершин. Укажите типы всех дуг графа и вычислите для каждой вершины значение функций $d(\cdot)$ и $f(\cdot)$.

3. ***Связностью* или *вершинной связностью*** $\kappa(G)$ неориентированного графа G называется наименьшеее число вершин, удаление которых превращает граф в несвязный или тривиальный. **Реберной связностью** $\lambda(G)$ графаG называется наименьшеее число ребер удаление которых превращает граф в несвязный или тривиальный.

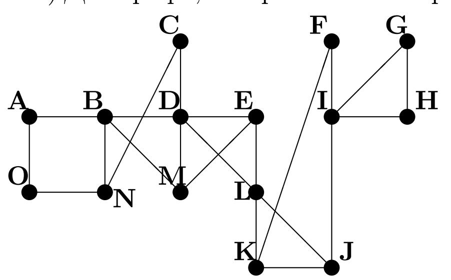
Максимальный по включению k-(реберно) связный подграф графа G называется его k- компонентой (соответственно, k-реберной компонентой). Обычно предполагается, что k-компонента имеет не менее $k+1$ вершин.

(1 балл) Покажите, что для любого G $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$ ($\delta(G)$ — это минимальная степень вершин G).

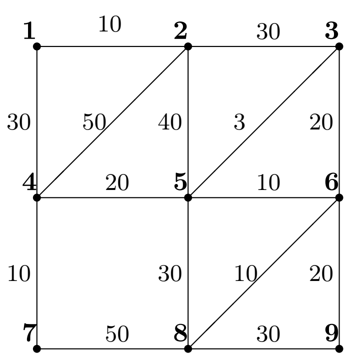
4. $(2+2$ балла) Постройте полиномиальный алгоритм или покажите NP-полноту проверки (i) k-связности и проверки (ii) k-реберной связности графа (k — двоичное число).

5. **Точка раздела** связного неориентированного графа G — это вершина, удаление которой делает граф несвязным. **Мост** — это ребро с аналогичным свойством. **Двусвязная компонента** связного графа содержит ≥ 3 вершин (или ≥ 2 ребер) и состоит из максимального набора ребер, в котором каждая пара ребер принадлежит общему простому (несамопересекающемуся) циклу.

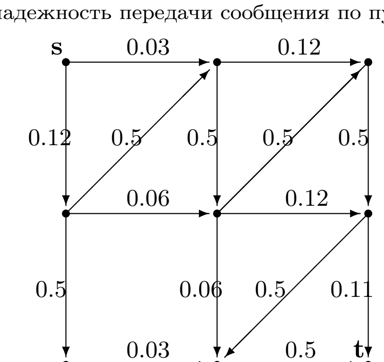
   (1 балл) Для графа, изображенного на рисунке, укажите точки раздела, мосты и двусвязные компоненты.



6. $(1+1$ балл) Найдите минимальное остовное дерево взвешенного графа G на рисунке с помощью алгоритмов Прима и Краскала. Изобразите графы, полученные на трех последовательных итерациях алгоритмов.



7. $(2+2+3$ балла) Коммуникационная сеть является ориентированным графом, причем каждому ребру (каналу связи) (u,v) приписано число $r(u,v)$— “надежность соединения”, где $0 \le r(u,v) \le 1$, так что $1 - r(u,v)$ можно рассматривать как вероятность разрыва соединения при передаче. Считаем, что “вероятности” $r(u,v)$ независимые, и таким образом, надежность передачи сообщения по пути $v_1, \ldots, v_k$ равна $\prod_{i=1}^{k-1} r(v_i, v_{i+1})$.



   (i) Постройте эффективный алгоритм нахождения наименее надежного пути в сети между вершинами s и t и укажите класс сетей, в которых алгоритм будет эффективным.

(ii) Проведите вычисления по вашему алгоритму для сети, изображенной на рисунке.

(iii) Постройте наименее надежную сеть, позволяющую передавать сообщения из вершины s в любую другую вершину графа, содержащую **минимальное** число дуг. Под *надежностью* сети понимается произведение надежностей всех входящих в нее дуг.

8. (1 + 1 балл) Вершины ориентированного **грид-графа** расположены в целых точках плоскости: $V(G) = \{(i,j),\ i = 0,\dots,m,\ j = 0,\dots,n\}$, а дуги соединяют соседние точки: $E(G) = \{[(i,j) \to (i+1,j)],\ i = 0,\dots,m-1,\ j = 0,\dots,n$ или $[(i,j) \to (i,j+1)],\ i = 0,\dots,m,\ j = 0,\dots,n-1\}$, причем дугам G приписаны целочисленные веса. Рассмотрим задачу поиска экстремального (самого "тяжелого" или самого "легкого") пути между вершинами $(0,0)$ и (m,n) (по определению, вес пути равен сумме весов входящих в него ребер). В таком виде — это типичная задача так называемого "динамического программирования", описанная во многих источниках. Для нее легко придумать оптимальный $O(mn)$-алгоритм

(i) Постройте $O(mn)$-алгоритм поиска экстремального пути.

(ii) Покажите, что ваш алгоритм оптимальный по сложности, поскольку любой алгоритм, решающий задачу, обязан прочитать вход (таблицу весов, размер которой равен mn). Иначе говоря, нужно показать, что ответ существенно зависит от каждого входного параметра.

Дополнительные задачи

k-связность графов

Ниже сформулированы утверждения, которые в принципе можно доказать, используя потоки в сетях, и речь идет только о неориентированных графах.

Вершинной (соответственно, реберной) связностью $\kappa(G)$ (соответственно, реберной $\lambda(G)$) называется наименьшее число вершин (ребер), удаление которых приводит к несвязному или тривиальному графу. .

В предыдущем задании мы установили неравенство $\kappa(G) \le \lambda(G) \le \delta(G)$ ($\delta(G)$ — максимальная степень вершин графа G).

Граф G называется вершинно n-связным или просто n-связным (соответственно, реберноно n-связным), если $\kappa(G) \ge n$ ($\lambda(G) \ge n$). Нетривиальный граф 1-связен, тогда и только тогда, когда он связен, и 2-связен, если и только если в нем более одного ребра и он не имеет точек сочленения. Например, полный граф K_2 не является 2-связным.

Попробуйте в качестве упражнения доказать, что граф двусвязен, тогда и только тогда, когда в нем любые две вершины принадлежят простому циклу.

Теоремы типа Менгера

Пусть u и v — две различные вершины связного графа G. Две простые цепи, соединяющие u и v, называются вершинно-непересекающимися, если у них нет общих вершин, отличных от u и v и реберно-непересекающимися, если у них нет общих ребер. Множество S вершин, ребер или вершин и ребер разделяет u и v, если u и v принадлежят различным различным компонентам графа $G \setminus S$.

Теорема 1 (Карл Менгер (1927)). Наименьшее число вершин, разделяющих вершины u и v, равно наибольшеиу числу непересекающихся простых u–v цепей.

Теорема 2 (Форд–Фалкерсон, Элайес–Файнштейн–Шеннон). Для любых двух вершин графа наибольшее число реберно-непересекающихся цепей, соединяющтх их, равно наименьшему числу ребер, разделяющих эти вершины.

Теорема 3 (Хасслер Уитни). Граф n-связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена не менее, чем n вершинно-непесекающимися путями.

Теорема 4. Граф реберно n-связен тогда и только тогда, когда любая пара его вершин соединена не менее, чем n реберно-непесекающимися путями.

Теорема 5. Наибольшее число непересекающихся цепей, соединяющих два непустых непересекающихся вершин V_1 и V_2, равно наименьшему числу вершин, разделяющих V_1 и V_2.

Назовем линией матрицы любую ее строку или столбец. Пусть M — $\{0,1\}$-матрица. Набор единичных элементов матрицы называется независимым, если никакая пара не лежит в общей линии.

Теорема 6. В любой бинарной матрице наибольшее число независимых единичных элементов равно наименьшему числу линий, покрывающих все единицы.

1. (2 + 2 балла) Дана выполнимая 2-КНФ φ, каждый дизъюнкт которой содержит ровно два различных литерала (литерал и его отрицание считаются различными). Будем говорить, что φ 1-*минимальна*, если к ней можно добавить один дизъюнт, содержащий два различных литерала так, чтобы она стала невыполнимой.

(i) Докажите или опровергните, что следующее условие является критерием 1-минимальности.

Рассмотрим ориентированный граф G_φ, в котором литералы и их отрицания являются вершинами, а каждый дизъюнкт порождает пару ребер вида: $x \vee y \Rightarrow [e_1 = (\neg x, y), e_2 = (\neg y, x)]$.

φ является 1-минимальной тогда и только тогда, когда в G_φ есть путь P, соединяющий противоположные литеральные вершины, $x \rightsquigarrow y$, $x = \neg y$ и имеется ребро, ведущее из вершины y в вершину $z \notin P$.

Если в указанном виде критерий не верен, то дополните его до корректного.

(ii) Постройте для задачи проверки 1-минимальности как можно более быстрый полиномиальный алгоритм.

Подсказка. Полезно вспомнить, полиномиальные алгоритмы проверки выпоолнимости 2-КНФ.

2. (3 балла) Постройте линейный по входу алгоритм, который, имея на входе граф G и некоторое его остовное дерево T, определяют, является ли T деревом поиска-в-ширину при старте с некоторой вершины G.

3. $(2 \times 1 + 2 + 1 + 2 \times 2)$ **Линейный алгоритм разбиения графа на двухсвязные компоненты**

(i) Покажите, что множества вершин, принадлежащие двум разным двусвязным компонентам, либо не пересекаются, либо имеют единственную общую вершину — точку раздела.

Построим по G новый граф G_b, в котором имеются вершины двух типов: v_a, отвечающие точкам раздела G, и v_b, отвечающие двусвязным компонентам G. Ребра G_b соединяют каждую вершину v_b со всеми вершинами v_a, попадающими в двусвязную компоненту, отвечающую v_b.

(ii) Покажите, что G_b — дерево, и постройте соответствующее дерево для G из задачи **№ 62**.

Оказывается, что точки раздела можно находить по дереву поиска в глубину. Затем, опять используя поиск в глубину, можно определить все двусвязные компоненты, т. е. двусвязные компоненты можно находить за линейное время. Мы ограничимся только алгоритмом выделения точек раздела графа.

(iii) Докажите, что корень дерева поиска в глубину является точкой раздела тогда и только тогда, когда у него больше одного потомка.

(iv) Постройте контрпример к следующему утверждению из книги **[Кормен 1, задача № 23-2 (б)]**: отличная от корня вершина v дерева поиска в глубину является точкой раздела, если и только если в дереве поиска в глубину не существует обратного ребра от потомка v (включая саму v) до собственного предка v (т. е. отличного от самой v).

(v) **[Кормен 1, упр. 23-2(в)]**.

Определим функцию $low(v) = \min[d(v), d(w)$, *если для некоторого потомка и вершины v в G есть обратное ребро* $(u, w)]$.

Покажите, как вычислить $low(\cdot)$ за время $O(|E|)$ [например, модифицируя поиск в глубину].

(vi) Покажите, как в линейное время вычислить все двусвязные компоненты графа[1]

4. (3 балла, продолжение обязательной задачи №8) Пусть теперь веса всех горизонтальных дуг $[(i, j) \to (i+1, j)]$ зависят только от j, а веса всех вертикальных дуг $[(i, j) \to (i, j+1)]$ зависят только от i. Таким образом, веса полностью заданы, если указаны n "горизонтальных" весов u_j и m "вертикальных" весов v_i, и длина входа равна в этом случае $O(m + n)$.

Постройте оптимальный линейный $O(m+n)$-алгоритм вычисления экстремальных путей для этого класса грид-графов.

5. (2 балла) Пусть минимальный остов для графа G уже построен. Затем к графу добавили одну вершину и соединили её с некоторыми вершинами исходного графа. Предложите эффективный алгоритм, поиска минимального остова в новом графе.

[1] **Подсказка.** Сначала, используя решение предыдущих задач, покажите, как с помощью поиска в глубину найти все точки раздела за линейное время. Это и свойства функции $low(\cdot)$ позволяют находить двусвязные компоненты при поиске в глубину, используя дополнительный стек. Можно также находить двусвязные компоненты другим способом (см. **[Кормен I, упр. 23-2(д)–(з)]**).