Домашнее задание №2

Дедлайн: 24 февраля 2018 г., 23:00

Основные задачи

1. (1+1+1+1 балл) Подбрасываем “честную” монету 10 раз. Подсчитайте вероятности следующих событий:

   (i) число выпавших “орлов” равно числу “решек”;

   (ii) выпало больше “орлов” чем “решек”;

   (iii) при $i = 1, \dots, 5$ одинаковы результаты i-го и $(11 - i)$-го бросаний;

   (iv) “орел” выпал не менее четырех раз подряд.

2. (1 балл) Пусть некоторый мужик говорит правду с вероятностью 75% и лжет с вероятностью 25%. Он подбрасывает симметричную кость и говорит, что “выпала 6”. С какой вероятностью выпала 6?

3. (1 балл) При двух бросках игральной кости выпало X_1 и X_2, соответственно. Вычислите $\mathbb{E}[\max\{X_1, X_2\}] + \mathbb{E}[\min\{X_1, X_2\}]$ (чем проще, тем лучше).

4. (3 + 3 балла)

   (i) Найдите математическое ожидание числа бросаний кости до первого выпадения двух шестерок.

   (ii) Симметричную монетку бросают неограниченное число раз. Какая из последовательностей встретится раньше с большей вероятностью: РОР или РРО?

5. (2 + 2 балла)

   (i) Из бара на улицу выходит захмелевший турист. В одном конце улицы находится его гостиница, в другом — полицейский участок. Вдоль улицы горят фонари и турист идет от одного фонаря к другому случайным образом: с вероятностью p в сторону гостиницы, с вероятностью $1 - p$ в сторону участка. Если турист достигает полицейского участка, то он там и остаётся. Найти вероятность того, что в конце концов он дойдет до гостиницы. Считайте, что фонари пронумерованы от 0 (гостиница) до n (участок), и бар находится у фонаря с номером m. Вычислите значение вероятности для $n = 10$, $m = 5$, $p = \frac{1}{3}$.

   (ii) При тех же условиях найдите среднее расстояние[1], которое пройдет турист.

6. (1 балл) Независимы ли события: при броске кубика “выпало четное число” и “выпало число очков, кратное трем”?

7. (1 балл) Найти математическое ожидание числа простых циклов длины r в случайном графе на n вершинах. Считаем, что в графе ребра между каждой парой вершин независимо генерируются с вероятностью p. Такая модель случайного графа называется **моделью Эрдёша-Реньи**.

8. (2 + 2 балла)

   (i) Имеется генератор случайных битов, который выдает 0 или 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Предложите алгоритм, который, используя данный генератор, возвращает 0 с вероятностью $\frac{1}{3}$ и 1 с вероятностью $\frac{2}{3}$. Оцените время работы вашего алгоритма в среднем и в худшем случае.

   (ii) То же самое, но наоборот: генератор выдаёт 0 с вероятностью $\frac{1}{3}$ и 1 с вероятностью $\frac{2}{3}$; нужно получить алгоритм, который с вероятностью $\frac{1}{2}$ печатает 0, а с вероятностью $\frac{1}{2}$ —- единицу. Оцените время работы вашего алгоритма в среднем и в худшем случае.

[1] Измерять расстояние нужно в фонарях.

Дополнительные задачи

1. (1 балл) Известно, что 96% выпускаемой продукции соответствует стандарту. Упрощенная схема контроля признает годным с вероятностью 0.98 каждый стандартный экземпляр аппаратуры и с вероятностью 0.05 — каждый нестандартный экземпляр аппаратуры. Найдите вероятность того, что изделие, прошедшее контроль, соответствует стандарту.

2. (5 баллов) Сто паровозов выехали из города по однополосной линии, каждый с постоянной скоростью. Когда движение установилось, то из-за того, что быстрые догнали идущих впереди более медленных, образовались караваны (группы, движущиеся со скоростью лидера). Найдите математическое ожидание и дисперсию числа караванов. Скорости различных паровозов независимы и одинаково распределены; считать, что с вероятностью 1 скорости всех паровозиков различны.

3. (6 баллов) На окружность единичного радиуса случайно равномерно бросаются n точек (равномерно — означает, что вероятность попасть в дугу окружности равна отношению длины дуги к длине окружности). Найти вероятность того, что все точки можно покрыть одной полуокружностью.

4. (5 баллов) n пассажиров выстроились в очередь, чтобы зайти в автобус, в котором ровно n пронумерованных мест. У каждого пассажира есть билет. Но первой в очереди стоит старушка, которая хоть и имеет на руках билет, но плохо видит номер места. Поэтому, когда она зашла в автобус то села на место со случайным номером (считаем, что старушка садится равновероятно на любое место). Далее происходит следующее: заходит очередной пассажир и если он видит, что его место занято, то он занимает случайно равновероятно любое место из оставшихся. Каждый следующий пассажир не заходит, пока предыдущий пассажир не сядет в автобус. Какова вероятность того, что последний пассажир в очереди займёт своё место.

5. (5 баллов) Найдите вероятность того, что случайно выбранные два натуральных числа окажутся взаимно простыми.