Домашнее задание №1

Дедлайн: 17 февраля 2019 г., 23:00

Небольшой ликбез

Производящей функцией последовательности $\{a_n,\ n = 0, 1, \dots\}$, по определению, называется *формальный* степенной ряд $\sum_{i=0}^{\infty} a_n t^n$. Термин "формальный" означает, что это просто другой способ записи последовательности. С производящими функциями можно проводить арифметические операции, а если им удаётся придать аналитический вид, т. е. считать, что t — это вещественная или комплексная переменная и соответствующий ряд сходится, то с ними можно обращаться как с обычными функциями.

Необходимо знать какой-нибудь вывод формулы Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$ и суммы гармонического ряда $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \ln n + \gamma$, где $\gamma = 0.57721\dots$ — это так называемая константа Эйлера. Кроме того, нужно знать, что такое числа Каталана $c_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ (c_n имеет множество комбинаторных интерпретаций, например, равно числу правильно построенных скобочных выражений или путей Дика длины $2n$) и выражение для их производящей функции $D(t) \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$.

Эти факты должны быть вам известны из курсов по математическому анализу и дискретному анализу. Возможно, они вам пригодятся при решении задания.

Основные задачи

1. (2+2 балла) Имеются окрашенные прямоугольные таблички трех видов: чёрный квадрат размером 2×2, белый квадрат размером 2×2 и серый прямоугольник размером 2×1 (такую табличку можно поворачивать на 90^0). Нужно подсчитать число различных способов Φ_n, которыми можно замостить полосу размера $2 \times n$. Считается, что полоса должна быть заполнена табличками без пробелов и без наложений (касания возможны только по границам). Два способа замощения считаются одинаковыми, если они совпадают при наложении (параллельном переносе) полосок.

   (i) Найдите Θ-асимптотику последовательности Φ_n.

   (ii) Найдите явную аналитическую формулу для Φ_n.

2. $(2 + 2 + 2$ балла) На вход подаются описания n событий в формате (s, f) — время начала и время окончания. Требуется составить расписание для человека, который хочет принять участие в максимальном количестве событий. Например, события это доклады на конфереции или киносеансы на фестивале, которые проходят в разных аудиториях. Предположим, что участвовать можно только с начала события и до конца. Рассмотрим три жадных алгоритма.

   (i) Выберем событие кратчайшей длительности, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.

   (ii) Выберем событие, наступающее раньше всех, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.

   (iii) Выберем событие, завершающееся раньше всех, добавим его в расписание, исключим из рассмотрения события, пересекающиеся с выбранным. Продолжим делать то же самое далее.

   Какой алгоритм вы выберете? В качестве обоснования для каждой процедуры проверьте, что она является оптимальной (т. е. гарантирует участие в максимальном числе событий) или постройте конкретный контрпример.

3. $(2 + 2 + 2$ балла) Пусть A_n — число натуральных решений уравнения $2x + 3y = n$, т. е. $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$, $A_5 = 1\,(x = 1, y = 1), \dots$.

(i) Найдите производящую функцию последовательности A_n, $n = 1, 2, \dots$.

(ii) Найдите θ-асимптотику A_n.

(iii) Найдите явное аналитическое выражение A_n.

4. (2 балла) Оцените трудоемкость рекурсивного алгоритма, разбивающего исходную задачу размера n на три задачи размеров $\lceil \frac{n}{\sqrt{3}} \rceil - 5$, используя для этого $10\frac{n^3}{\log n}$ операций.

5. (1 балл) Функция натурального аргумента $S(n)$ задана рекурсией:

$$S(n) = \begin{cases} 100 & n \leqslant 100 \\ S(n-1) + S(n-3) & n > 100. \end{cases}$$

Оцените число рекурсивных вызовов процедуры $S(\cdot)$ при вычислении $S(10^{12})$ без запоминания, так как будто вы написали и вызвали рекурсивную функцию в C++.

6. (2 балла) Найдите Θ-асимптотику последовательности

$$T(n) = T(\lceil \sqrt{n} \rceil) + \Theta(\log^2 n).$$

Дополнительные задачи

1. (2 балла) Назовём правильное скобочное выражение *блоком*, если нем первая (открывающая) и последняя (закрывающая) скобки являются парными. Вычислите число $g_k(n)$ правильных скобочных выражений, имеющих n скобок, которые состоят ровно из $k \geq 1$ блоков.

2. (1 + 1 балл) Рассмотрим детерминированный алгоритм поиска порядковой статистики за линейное время из параграфа 10.3 (или 9.3; зависит от издания) Кормена. Какая асимптотика будет у алгоритма, если:

(i) Делить элементы массива на группы по три, а не по пять?

(ii) Делить элементы массива на группы по семь, а не по пять?