Неравенство Маркова и его следствия. Сходимость последовательностей случайных величин. Семинар 10. 6 ноября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [НатанТВ, Гл. 8], [Ширяев, Гл. 2 §10], [Боровков, Гл. 6 §1-2]

Ключевые слова: неравенство Маркова, обобщённое неравенство Маркова, неравенство Чебышёва, неравенство Чернова, сходимость по вероятность, сходимость почти наверное, сходимость в среднем, сходимость по распределению, теорема Леви о непрерывности, предельная теорема Пуассона

Неравенства Маркова, Чебышёва, Чернова

Теорема 1. (Неравенство Маркова). Пусть ξ — неотрицательная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Тогда для любого $t > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}(\xi \geqslant t) \leqslant \frac{\mathbb{E}\xi}{t}.$$

Приведем несколько следствий из неравенства Маркова.

Следствие 1. (Обобщенное неравенство Маркова). Пусть неотрицательная функция $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (нестрого) монотонно возрастает на положительной полуоси, а неотрицательная случайная величина ξ такова, что $\mathbb{E}[g(\xi)] < \infty$. Тогда для любого $t > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}\{\xi \geqslant t\} \leqslant \frac{\mathbb{E}[g(\xi)]}{g(t)}.$$

Следствие 2. (Неравенство Чебышёва). Пусть ξ — случайная величина с конечной дисперсией. Тогда для любого $t > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}\left\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geqslant t\right\} \leqslant \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}.$$

Следствие 3. (Неравенство Чернова) Пусть ξ — случайная величина с конечными экспоненциальными моментами $\mathbb{E}e^{\lambda\xi}$ для всех $\lambda > 0$. Тогда для любого $t > 0$ выполнено

$$\mathbb{P}\left\{\xi \geqslant t\right\} \leqslant \inf_{\lambda > 0} \frac{\mathbb{E}\left[e^{\lambda\xi}\right]}{e^{\lambda t}}.$$

Замечание 1. Неравенство Чернова часто используется для анализа сумм независимых случайных величин.

Сходимость последовательностей случайных величин

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, заданных на этом вероятностном пространстве. В математическом анализе вы сталкивались с разными видами сходимости функций. Случайные величины — функции, поэтому существуют разные способы определить сходимость последовательности случайных величин.

Определение 1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится по вероятности** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$), если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Определение 2. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится почти наверное (с вероятностью 1)** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$), если

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi(\omega)\right\} = 1.$$

Замечание 2. Эти понятия вам уже хорошо известны из курса функционального анализа: певрое соответствует сходимости по мере, а второе — сходимости почти всюду. В курсе функционального анализа доказывался следующий факт: из каждой последовательности, сходящейся по мере, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Если перевести этот факт на язык теории вероятностей, то получим, что из любой последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти наверное.

Определение 3. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится в среднем p-го порядка** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$), если

$$\mathbb{E}\left[|\xi_n - \xi|^p\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Замечание 3. В случае, когда $p = 1$, данную сходимость называют **сходимостью в среднем**, а когда $p = 2$, — **сходимостью в среднеквадратичном** ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{с.к.}} \xi$).

Аналогичным образом, как это делалось в математическом анализе, можно определить для каждого типа сходимости понятие фундаментальной последовательности (если возникают затруднения или если хочется себя проверить, см. **[Боровков, Гл.6, §1]**).

Теорема 2. (Признак сходимости Коши). $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \xi$ в каком-нибудь смысле (по вероятности, п.н., в среднем порядка p) тогда и только тогда, когда ξ_n фундаментальна в соответствующем смысле.

Определение 4. Последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ **сходится по распределению** к случайной величине ξ ($\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$), если для любой ограниченной непрерывной функции ψ

$$\mathbb{E}\left[\psi(\xi_n)\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[\psi(\xi)\right].$$

Замечание 4. Заметим, что последний тип сходимости зависит только от распределений случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и ξ и описывает на самом деле близость распределений. Пусть F_n — функции распределения соответствующих ξ_n, F — функция распределения ξ. Говорят, что F_n **слабо сходится** к F ($F_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F$), если для любой ограниченной непрерывной функции ψ

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x) dF_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x) dF(x),$$

то есть $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \Longleftrightarrow F_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F$.

Следующая теорема устанавливает связь между слабой сходимостью и поточечной сходимостью в точках непрерывности предельной функции распределения.

Теорема 3. $F_n \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} F$ тогда и только тогда, когда $F_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F(x)$ в каждой точке x, в которой функция F непрерывна.

Следующая лемма оказывается часто полезной при доказательстве предельных теорем.

Лемма 1. (Лемма Бореля-Кантелли). Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность событий. Пусть событие $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$, которое по определению содержит те и только те элементарные исходы, которые принадлежат бесконечному числу событий (поэтому часто говорят, что событие A означает, что бесконечно много событий из $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ наступили). Тогда

1) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} < \infty$, то $\mathbb{P}\{A\} = 0$;

2) если события $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ независимы в совокупности и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} = \infty$, то $\mathbb{P}\{A\} = 1$.

Упражнение 1. Докажите, что если для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\right\} < \infty,$$

то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$.

Упражнение 2. Докажите, что из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} c$, где $c \in \mathbb{R}$ — константа, следует, что $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} c$.

Упражнение 3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые случайные величины и $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$. Покажите, что существует число $c \in \mathbb{R}$ такое, что $\xi = c$ с вероятностью 1.

Следующая теорема замечательным образом связывает сходимость по распределению со сходимостью характеристических функций.

Теорема 4. (Теорема Леви о непрерывности). Пусть последовательность случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено: $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi(t)$. Пусть $\varphi(t)$ *непрерывна в нуле*. Тогда существует такая случайная величина ξ, что $\varphi = \varphi_\xi$ и $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$. Обратно, если $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$, то $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} \varphi_\xi(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$.

Упражнение 4. (Предельная теорема Пуассона). Пусть $\xi_n \sim \mathrm{Binom}(n, p_n)$ и $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$. Покажите, что $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

Теперь займёмся вопросом о связи различных типов сходимости. Схематически эти связи обозначены на Рисунке 1.

$$\begin{tikzcd}
\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi \arrow[dr] & & \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi \arrow[dl] \\
& \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi \arrow[d] & \\
& \xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi &
\end{tikzcd}$$

Рис. 1: Связь разных типов сходимости случайных величин.

Перечислим важные свойства типов сходимости случайных величин.

1. Из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$.

2. Из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$.

3. Из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \xi$.

4. Если последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает почти наверное, т. е. с вероятностью 1 выполнено $\xi_n \leqslant \xi_{n+1}$, то из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$.

5. Если последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно ограничена, т. е. существует такое число $a > 0$, что $|\xi_n| < a$ для всех n, то из $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \xi$ следует $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} \xi$.

Пример 1. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится по распределению к ξ, но не сходится по вероятности к ξ.

Пример 2. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится по вероятности к ξ, но не сходится почти наверное к ξ.

Пример 3. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится по вероятности к ξ, но не сходится в среднем порядка p к ξ ни для какого $p > 0$.

Пример 4. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится почти наверное к ξ, но не сходится в среднем порядка p к ξ ни для какого $p > 0$.

Пример 5. Придумайте последовательность $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая сходится в среднем порядка p к ξ, но не сходится почти наверное к ξ.