Условное математическое ожидание (продолжение). Семинар 8. 23 октября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [Ширяев, Гл. 1 §8, Гл. 2 §7], [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 4 §2], [Гнеденко, Гл. 5 §23]

Ключевые слова: условное математическое ожидание относительно σ-алгебры, условная вероятность относительно σ-алгебры

Первые 10-15 минут семинара — разбор прошедшей контрольной работы.

Условное математическое ожидание относительно σ-алгебры

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и некоторую σ-алгебру $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ ($\mathcal{D}$ — σ-подалгебра $\mathcal{F}$). Пусть ξ — некоторая случайная величина. Мы определяли математического ожидание случайной величины ξ (интеграл Лебега по вероятностной мере) в два этапа: сначала это было сделано для неотрицательных случайных величин, а затем и в общем случае мат. ожидание было определено формулой:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^- \quad \text{при условии, что } \min\{\mathbb{E}\xi^-, \mathbb{E}\xi^+\} < \infty.$$

Подобная же конструкция используется для определения условного мат. ожидания относительно σ-алгебры.

Определение 1. 1. **Условным математическим ожиданием неотрицательной случайной величины ξ относительно σ-алгебры** $\mathcal{D}$ называется *расширенная случайная величина* $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega)$ (т.е. принимающая значения из $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$), такая, что

a) $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega)$ является $\mathcal{D}$-измеримой;

b) для любого события $A \in \mathcal{D}$ выполняется:

$$\int\limits_A \xi d\mathbb{P} = \int\limits_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]d\mathbb{P}.$$

2. **Условным математическим ожиданием произвольной случайной величины ξ относительно σ-алгебры** $\mathcal{D}$ называется *расширенная случайная величина*

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega) - \mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega)$$

при условии, что с вероятностью 1 выполнено неравенство:

$$\min\{\mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega), \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega)\} < \infty,$$

причём на множестве нулевой вероятностной меры $\{\omega \in \Omega \mid \min\{\mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega), \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega)\} = \infty\}$ значение условного математического ожидание определяется произвольным образом. Если же $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \min\{\mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega), \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega)\} = \infty\} > 0$, то условное математическое ожидания ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{D}$ неопределено.

Замечание 1. Существование условного математического ожидания для неотрицательных случайных величин гарантирует теорема Радона-Никодима. Для этого рассмотрим неотрицательную случайную величину ξ и функцию множеств

$$Q(A) = \int\limits_A \xi d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{D}.$$

Легко показать, что $Q(\cdot)$ является мерой на $(\Omega, \mathcal{D})$, которая *абсолютно непрерывна* относительно меры $\mathbb{P}$ (по определению, это означает, что из $\mathbb{P}\{A\} = 0, A \in \mathcal{D}$ следует $Q(A) = 0$). Тогда по теореме Радона-Никодима существует такая неотрицательная $\mathcal{D}$-измеримая расширенная случайная величина $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega)$, что

$$Q(A) = \int\limits_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]d\mathbb{P}.$$

Она определена с точностью до множества $\mathbb{P}$-меры нуль.

Замечание 2. Отметим, что свойство (b) из определения будет выполнено, если положить $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \xi$. Но так сделать в общем случае нельзя, т. к. ξ *не обязана быть $\mathcal{D}$-измеримой*.

Замечание 3. В случае тривиальной σ-алгебры $\mathcal{D} = \{\varnothing, \Omega\}$ получаем, что $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \mathbb{E}\xi$.

Определение 2. Условной вероятностью события $B \in \mathcal{F}$ **относительно σ-алгебры** $\mathcal{D}$ называется *обобщённая случайная величина*

$$\mathbb{P}\{B|\mathcal{D}\}(\omega) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{I}_B|\mathcal{D}](\omega).$$

Из введённых определений следует, что для каждого фиксированного $B \in \mathcal{F}$ выполнено:

a) $\mathbb{P}\{B|\mathcal{D}\}(\omega)$ является $\mathcal{D}$-измеримой;

b) для любого $A \in \mathcal{D}$

$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \int\limits_A \mathbb{P}\{B|\mathcal{D}\}d\mathbb{P}.$$

Определение 3. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ **относительно случайной величины** η называется *обобщённая случайная величина*

$$\mathbb{E}[\xi|\eta](\omega) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_\eta](\omega),$$

где $\mathcal{D}_\eta$ — σ-алгебра, порождённая случайной величиной η (при условии, что $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_\eta](\omega)$ определено).

Определение 4. Условной вероятностью события $B \in \mathcal{F}$ **относительно случайной величины** η называется *обобщённая случайная величина*

$$\mathbb{P}\{B|\eta\}(\omega) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\mathbb{I}_B|\mathcal{D}_\eta\}(\omega),$$

где $\mathcal{D}_\eta$ — σ-алгебра, порождённая случайной величиной η (при условии, что $\mathbb{P}\{B|\mathcal{D}_\eta\}(\omega)$ определена).

Следующая теорема показывает, что введённое определение условного математического ожидания согласуется с определением, данным на прошлом семинаре.

Теорема 1. Пусть $D = \{B_1, \ldots, B_n\}$ — некоторое разбиение вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть $\mathcal{D} = \sigma(D)$ и ξ — некоторая случайная величина, для которой $\mathbb{E}\xi$ определено. Тогда с вероятностью 1 выполнено равенство

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \mathbb{E}[\xi|D].$$

Доказательство. Действительно, если случайная величина $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]$ является $\mathcal{D}$-измеримой, то она принимает постоянные значения на элементах разбиения B_i (с вероятностью 1), т.е. с вероятностью 1 выполняется равенство

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}_{B_i}.$$

Тогда для всех B_i из определения условного математического ожидания относительно σ-алгебры имеем:

$$\int\limits_{B_i} \xi d\mathbb{P} = \int\limits_{B_i} \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]d\mathbb{P} = x_i\mathbb{P}\{B_i\} \Rightarrow x_i = \frac{1}{\mathbb{P}\{B_i\}} \int\limits_{B_i} \xi d\mathbb{P} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi|B_i],$$

то есть

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbb{I}_{B_i} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi|B_i]\mathbb{I}_{B_i} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi|D].$$

□

Перечислим теперь важные свойства условного математического ожидания относительно σ-алгебры.

1. Если c — константа и $\xi = c$ с вероятностью 1, то с вероятностью 1 $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = c$. Данное свойство следует из того, что константная функция измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{D}$ и удовлетворяет равенству:
$$\int_A \xi d\mathbb{P} = \int_A c d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{D}.$$
2. Если $\xi \leqslant \eta$ с вероятностью 1, то $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] \leqslant \mathbb{E}[\eta|\mathcal{D}]$ с вероятностью 1. Действительно, мы имеем
$$\int_A \xi d\mathbb{P} \leqslant \int_A \eta d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{D},$$
а значит,
$$\int_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] d\mathbb{P} \leqslant \int_A \mathbb{E}[\eta|\mathcal{D}] d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{D}.$$
Последнее означает, что $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] \leqslant \mathbb{E}[\eta|\mathcal{D}]$ с вероятностью 1 (это следует из свойств интеграла Лебега и того факта, что $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]$ и $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{D}]$ измеримы относительно $\mathcal{D}$).
3. $|\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]| \leqslant \mathbb{E}[|\xi||\mathcal{D}]$ с вероятностью 1. Данное свойство вытекает из предыдущего.
4. Если a, b — постоянные и $a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$ определено, то с вероятностью 1 выполнено равенство
$$\mathbb{E}[a\xi + b\eta|\mathcal{D}] = a\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] + b\mathbb{E}[\eta|\mathcal{D}].$$
Данное свойство следует из линейности интеграла Лебега.
5. Если $\mathcal{D}_* = \{\varnothing, \Omega\}$ — тривиальная σ-алгебра, то $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_*] = \mathbb{E}\xi$. Это свойство следует из того, что константа $\mathbb{E}\xi$ является $\mathcal{D}_*$-измеримой функцией и если $A = \varnothing$ или $A = \Omega$, то выполняется
$$\int_A \xi d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}\xi d\mathbb{P}.$$
6. $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}] = \xi$ с вероятностью 1. Поскольку ξ — $\mathcal{F}$-измерима и
$$\int_A \xi d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P}, \quad \forall A \in \mathcal{F},$$
то $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}] = \xi$ с вероятностью 1.
7. Если $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$, то с вероятностью 1
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1\right] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_1].$$
Действительно, для любого множества $A \in \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$
$$\int_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_1] d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P}$$
и
$$\int_A \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1\right] d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2] d\mathbb{P} = \int_A \xi d\mathbb{P}.$$

Тогда для всех $A \in \mathcal{D}_1$

$$\int\limits_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_1]d\mathbb{P} = \int\limits_A \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1\right]d\mathbb{P},$$

откуда следует, что $\mathcal{D}_1$-измеримые функции $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_1]$ и $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1\right]$ совпадают с вероятностью 1.

8. Если $\mathcal{D}_1 \supseteq \mathcal{D}_2$, то с вероятностью 1
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1\right] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2].$$
Действительно, $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]$ является $\mathcal{D}_2$-измеримой случайной величиной, а значит, и $\mathcal{D}_1$-измеримой. Кроме того,
$$\int\limits_A \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1\right]d\mathbb{P} = \int\limits_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]d\mathbb{P}.$$
Значит, $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]$ является одним из вариантов условного математического ожидания $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1\right]$.

9. С вероятностью 1 выполнено равенство $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]\right] = \mathbb{E}\xi$. Данное свойство следует из свойства 7, если взять $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_* = \{\varnothing, \Omega\}$ и $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$ и воспользоваться свойством 5.

10. Если для случайной величины ξ определено математическое ожидание $\mathbb{E}\xi$ и она не зависит от σ-алгебры $\mathcal{D}$ (то есть не зависит от $\mathbb{I}_A$ для всех $A \in \mathcal{D}$), то с вероятностью 1
$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \mathbb{E}\xi.$$
Это так, поскольку $\mathbb{E}\xi$ является $\mathcal{D}$-измеримой случайной величиной и верна цепочка равенств
$$\int\limits_A \xi d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\xi \mathbb{I}_A] = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{E}\mathbb{I}_A = \mathbb{E}\xi \cdot \mathbb{P}\{A\} = \int\limits_A \mathbb{E}\xi d\mathbb{P}.$$

11. Если η — $\mathcal{D}$-измеримая случайная величина, $\mathbb{E}|\eta| < \infty$ и $\mathbb{E}|\xi\eta| < \infty$, то с вероятностью 1
$$\mathbb{E}[\xi\eta|\mathcal{D}] = \eta\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}].$$
В частности,
$$\mathbb{E}[\xi\eta|\eta] = \eta\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]$$
с вероятностью 1. Данное свойство доказывается сначала для простых функций η, а потом для произвольных $\mathcal{D}$-измеримых функций путём предельного перехода.

Определение 5. Пусть ξ и η — случайные величины и $\mathbb{E}\xi$ определено. **Условным математическим ожиданием случайной величины ξ при условии, что** $\eta = y$ называется борелевская функция $\mathbb{E}[\xi|\eta = y] \stackrel{\mathrm{def}}{=} m(y)$ такая, что

$$\int\limits_{\{\omega\in\Omega|\eta(\omega)\in B\}} \xi(\omega)d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_B m(y)d\mathbb{P}_\eta(y), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Существование такой функции показывается аналогичными рассуждениями с использованием теоремы Радона-Никодима, что и при доказательстве существования условного математического ожидания относительно σ-алгебры.

Применяя теорему о замене переменных под знаком интеграла Лебега, получим, что

$$\int\limits_{\{\omega\in\Omega|\eta(\omega)\in B\}} \xi(\omega)d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_B m(y)d\mathbb{P}_\eta(y) = \int\limits_{\{\omega\in\Omega|\eta(\omega)\in B\}} m(\eta(\omega))d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Случайная величина $m(\eta)$ является $\mathcal{D}_\eta$-измеримой, а множествами $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\} B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ исчерпываются все множества из $\mathcal{D}_\eta$. Следовательно, $m(\eta) = \mathbb{E}[\xi|\eta]$ с вероятностью 1. Отсюда следует, что можно восстановить $\mathbb{E}[\xi|\eta]$, зная $\mathbb{E}[\xi|\eta = y]$, и, наоборот, по $\mathbb{E}[\xi|\eta]$ можно найти $\mathbb{E}[\xi|\eta = y]$.

Можно показать, что для любой $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-измеримой функции $\varphi(x, y)$ и независимых случайных величин ξ и η таких, что $\mathbb{E}|\varphi(\xi, \eta)| < \infty$, то с вероятностью 1

$$\mathbb{E}[\varphi(\xi, \eta)|\eta = y] = \mathbb{E}[\varphi(\xi, y)].$$

Данный факт оказывается очень полезным при решении задач, но мы его оставим без доказательства.

Определение 6. Условной вероятностью события $A \in \mathcal{F}$ **при условии, что** $\eta = y$ будем называть *расширенную случайную величину*

$$\mathbb{P}\{A|\eta = y\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{I}_A|\eta = y].$$

Заметим, что из данного определения следует определение условной вероятности $\mathbb{P}\{A|\eta = y\}$, данное на пятом семинаре:

$$\mathbb{P}\left\{A \cap \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \in B\}\right\} = \int\limits_B \mathbb{P}\{A|\eta = y\} d\mathbb{P}_\eta(y), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Пример 1. Пусть (ξ, η) — пара случайных величин, имеющих совместное абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$. Пусть $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ — плотности распределения ξ и η соответственно. Теперь мы готовы обосновать факт с пятого семинара, что плотность условного распределения $\xi|\eta$ равна

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = g(x, y),$$

где $g(x, y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)}$, причём $g(x, y)$ положим равной нулю, если $f_\eta(y) = 0$. Иными словами, нам нужно показать, что

$$\mathbb{P}\{\xi \in C|\eta = y\} = \int\limits_C g(x, y)dx, \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Для этого воспользуемся определением условной вероятности:

$$\mathbb{P}\left\{\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in C\} \cap \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \in B\}\right\} = \int\limits_B \mathbb{P}\{\xi \in C|\eta = y\} d\mathbb{P}_\eta(y), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Используя *теорему Фубини*, получим

$$\begin{aligned}
\int\limits_B \left[\int\limits_C g(x, y)dx\right] d\mathbb{P}_\eta(y) \quad &= \int\limits_B \left[\int\limits_C g(x, y)dx\right] d\mathbb{P}_\eta(y) \\
&= \int\limits_B \left[\int\limits_C g(x, y)dx\right] f_\eta(y)dy \\
&= \int\limits_{C\times B} g(x, y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x,y)}{f_\eta(y)} f_\eta(y)dxdy \\
&= \int\limits_{C\times B} f_{\xi,\eta}(x, y)dxdy \\
&= \mathbb{P}\{\xi \in C, \eta \in B\},
\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\mathbb{P}\{\xi \in C|\eta = y\} = \int\limits_C g(x, y)dx, \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Аналогичным образом, можно показать, что

$$\mathbb{E}[\xi|\eta = y] = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_{\xi|\eta}(x|y)dx.$$

Замечание 4. Если в определении $\mathbb{P}\{A|\eta = y\}$ взять $B = \mathbb{R}$, то получим **формулу полной вероятности**:

$$\mathbb{P}\{A\} = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{A|\eta = y\} d\mathbb{P}_\eta(y).$$

Например, если $A = \{\omega \in \Omega | \varphi(\xi, \eta) < 0\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(\xi, \eta) < 0\}$, где $\varphi(x, y)$ — некоторая борелевская функция, а ξ и η — независимые случайные величины, то

$$\mathbb{P}\{\varphi(\xi, \eta) < 0\} = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\varphi(\xi, \eta) < 0 | \eta = y\} d\mathbb{P}_\eta(y) = \int\limits_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\varphi(\xi, y) < 0\} d\mathbb{P}_\eta(y).$$