

---

## Условное математическое ожидание (продолжение). Семинар 8. 23 октября 2018 г.

---

*Подготовил: Горбунов Э.*

**Источники:** [Ширяев, Гл. 1 §8, Гл. 2 §7], [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 4 §2], [Гнеденко, Гл. 5 §23]

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО  $\sigma$ -АЛГЕБРЫ, УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО  $\sigma$ -АЛГЕБРЫ

**Первые 10-15 минут семинара — разбор прошедшей контрольной работы.**

### Условное математическое ожидание относительно $\sigma$ -алгебры

Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и некоторую  $\sigma$ -алгебру  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$  ( $\mathcal{D}$  —  $\sigma$ -подалгебра  $\mathcal{F}$ ). Пусть  $\xi$  — некоторая случайная величина. Мы определяли математического ожидание случайной величины  $\xi$  (интеграл Лебега по вероятностной мере) в два этапа: сначала это было сделано для неотрицательных случайных величин, а затем и в общем случае мат. ожидание было определено формулой:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^- \quad \text{при условии, что } \min\{\mathbb{E}\xi^-, \mathbb{E}\xi^+\} < \infty.$$

Подобная же конструкция используется для определения условного мат. ожидания относительно  $\sigma$ -алгебры.

**Определение 1.** 1. **Условным математическим ожиданием неотрицательной случайной величины  $\xi$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{D}$**  называется *расширенная случайная величина*  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega)$  (т.е. принимающая значения из  $\mathbb{R} = [-\infty, +\infty]$ ), такая, что

- а)  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega)$  является  $\mathcal{D}$ -измеримой;
- б) для любого события  $A \in \mathcal{D}$  выполняется:

$$\int_A \xi d\mathbb{P} = \int_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] d\mathbb{P}.$$

2. **Условным математическим ожиданием произвольной случайной величины  $\xi$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{D}$**  называется *расширенная случайная величина*

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega) - \mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega)$$

при условии, что с вероятностью 1 выполнено неравенство:

$$\min\{\mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega), \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega)\} < \infty,$$

причём на множестве нулевой вероятностной меры  $\{\omega \in \Omega \mid \min\{\mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega), \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega)\} = \infty\}$  значение условного математического ожидания определяется произвольным образом. Если же  $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \min\{\mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega), \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega)\} = \infty\} > 0$ , то условное математическое ожидания  $\xi$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{D}$  неопределено.

**Замечание 1.** Существование условного математического ожидания для неотрицательных случайных величин гарантирует теорема Радона-Никодима. Для этого рассмотрим неотрицательную случайную величину  $\xi$  и функцию множеств

$$Q(A) = \int_A \xi d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{D}.$$

Легко показать, что  $Q(\cdot)$  является мерой на  $(\Omega, \mathcal{D})$ , которая *абсолютно непрерывна* относительно меры  $\mathbb{P}$  (по определению, это означает, что из  $\mathbb{P}\{A\} = 0, A \in \mathcal{D}$  следует  $Q(A) = 0$ ). Тогда по теореме Радона-Никодима существует такая неотрицательная  $\mathcal{D}$ -измеримая расширенная случайная величина  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega)$ , что

$$Q(A) = \int_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]d\mathbb{P}.$$

Она определена с точностью до множества  $\mathbb{P}$ -меры нуль.

**Замечание 2.** Отметим, что свойство (b) из определения будет выполнено, если положить  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \xi$ . Но так сделать в общем случае нельзя, т. к.  $\xi$  не обязана быть  $\mathcal{D}$ -измеримой.

**Замечание 3.** В случае тривиальной  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{D} = \{\emptyset, \Omega\}$  получаем, что  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \mathbb{E}\xi$ .

**Определение 2.** Условной вероятностью события  $B \in \mathcal{F}$  относительно  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{D}$  называется обобщённая случайная величина

$$\mathbb{P}\{B|\mathcal{D}\}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{I}_B|\mathcal{D}](\omega).$$

Из введённых определений следует, что для каждого фиксированного  $B \in \mathcal{F}$  выполнено:

- a)  $\mathbb{P}\{B|\mathcal{D}\}(\omega)$  является  $\mathcal{D}$ -измеримой;
- b) для любого  $A \in \mathcal{D}$

$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \int_A \mathbb{P}\{B|\mathcal{D}\}d\mathbb{P}.$$

**Определение 3.** Условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  относительно случайной величины  $\eta$  называется обобщённая случайная величина

$$\mathbb{E}[\xi|\eta](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_\eta](\omega),$$

где  $\mathcal{D}_\eta$  —  $\sigma$ -алгебра, порождённая случайной величиной  $\eta$  (при условии, что  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_\eta](\omega)$  определено).

**Определение 4.** Условной вероятностью события  $B \in \mathcal{F}$  относительно случайной величины  $\eta$  называется обобщённая случайная величина

$$\mathbb{P}\{B|\eta\}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\mathbb{I}_B|\mathcal{D}_\eta\}(\omega),$$

где  $\mathcal{D}_\eta$  —  $\sigma$ -алгебра, порождённая случайной величиной  $\eta$  (при условии, что  $\mathbb{P}\{B|\mathcal{D}_\eta\}(\omega)$  определена).

Следующая теорема показывает, что введённое определение условного математического ожидания согласуется с определением, данным на прошлом семинаре.

**Теорема 1.** Пусть  $D = \{B_1, \dots, B_n\}$  — некоторое разбиение вероятностного пространства  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Пусть  $\mathcal{D} = \sigma(D)$  и  $\xi$  — некоторая случайная величина, для которой  $\mathbb{E}\xi$  определено. Тогда с вероятностью 1 выполнено равенство

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \mathbb{E}[\xi|D].$$

Перечислим теперь важные свойства условного математического ожидания относительно  $\sigma$ -алгебры.

1. Если  $c$  — константа и  $\xi = c$  с вероятностью 1, то с вероятностью 1  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = c$ .
2. Если  $\xi \leq \eta$  с вероятностью 1, то  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] \leq \mathbb{E}[\eta|\mathcal{D}]$  с вероятностью 1.
3.  $|\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]| \leq \mathbb{E}[|\xi|\mathcal{D}]$  с вероятностью 1.
4. Если  $a, b$  — постоянные и  $a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$  определено, то с вероятностью 1 выполнено равенство

$$\mathbb{E}[a\xi + b\eta|\mathcal{D}] = a\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] + b\mathbb{E}[\eta|\mathcal{D}].$$

5. Если  $\mathcal{D}_* = \{\emptyset, \Omega\}$  — тривиальная  $\sigma$ -алгебра, то  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_*] = \mathbb{E}\xi$ .

6.  $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}] = \xi$  с вероятностью 1.

7. Если  $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$ , то с вероятностью 1

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_1].$$

8. Если  $\mathcal{D}_1 \supseteq \mathcal{D}_2$ , то с вероятностью 1

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2].$$

9. С вероятностью 1 выполнено равенство  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]] = \mathbb{E}\xi$ .

10. Если для случайной величины  $\xi$  определено математическое ожидание  $\mathbb{E}\xi$  и она не зависит от  $\sigma$ -алгебры  $\mathcal{D}$  (то есть не зависит от  $\mathbb{I}_A$  для всех  $A \in \mathcal{D}$ ), то с вероятностью 1

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \mathbb{E}\xi.$$

11. Если  $\eta$  —  $\mathcal{D}$ -измеримая случайная величина,  $\mathbb{E}|\eta| < \infty$  и  $\mathbb{E}|\xi\eta| < \infty$ , то с вероятностью 1

$$\mathbb{E}[\xi\eta|\mathcal{D}] = \eta\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}].$$

В частности,

$$\mathbb{E}[\xi\eta|\eta] = \eta\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]$$

с вероятностью 1. Данное свойство доказывается сначала для простых функций  $\eta$ , а потом для произвольных  $\mathcal{D}$ -измеримых функций путём предельного перехода.

**Определение 5.** Пусть  $\xi$  и  $\eta$  — случайные величины и  $\mathbb{E}\xi$  определено. **Условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  при условии, что  $\eta = y$**  называется борелевская функция  $\mathbb{E}[\xi|\eta = y] \stackrel{\text{def}}{=} m(y)$  такая, что

$$\int_{\{\omega \in \Omega | \eta(\omega) \in B\}} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_B m(y) d\mathbb{P}_\eta(y), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Существование такой функции показывается аналогичными рассуждениями с использованием теоремы Радона-Никодима, что и при доказательстве существования условного математического ожидания относительно  $\sigma$ -алгебры.

Применяя теорему о замене переменных под знаком интеграла Лебега, получим, что

$$\int_{\{\omega \in \Omega | \eta(\omega) \in B\}} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int_B m(y) d\mathbb{P}_\eta(y) = \int_{\{\omega \in \Omega | \eta(\omega) \in B\}} m(\eta(\omega)) d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Случайная величина  $m(\eta)$  является  $\mathcal{D}_\eta$ -измеримой, а множествами  $\{\omega \in \Omega | \xi(\omega) \in B\} B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  исчерпываются все множества из  $\mathcal{D}_\eta$ . Следовательно,  $m(\eta) = \mathbb{E}[\xi|\eta]$  с вероятностью 1. Отсюда следует, что можно восстановить  $\mathbb{E}[\xi|\eta]$ , зная  $\mathbb{E}[\xi|\eta = y]$ , и, наоборот, по  $\mathbb{E}[\xi|\eta]$  можно найти  $\mathbb{E}[\xi|\eta = y]$ .

Можно показать, что для любой  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ -измеримой функции  $\varphi(x, y)$  и независимых случайных величин  $\xi$  и  $\eta$  таких, что  $\mathbb{E}|\varphi(\xi, \eta)| < \infty$ , то с вероятностью 1

$$\mathbb{E}[\varphi(\xi, \eta)|\eta = y] = \mathbb{E}[\varphi(\xi, y)].$$

Данный факт оказывается очень полезным при решении задач, но мы его оставим без доказательства.

**Определение 6.** **Условной вероятностью события  $A \in \mathcal{F}$  при условии, что  $\eta = y$**  будем называть расширенную случайную величину

$$\mathbb{P}\{A|\eta = y\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{I}_A|\eta = y].$$

Заметим, что из данного определения следует определение условной вероятности  $\mathbb{P}\{A|\eta = y\}$ , данное на [пятом семинаре](#):

$$\mathbb{P}\{A \cap \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \in B\}\} = \int_B \mathbb{P}\{A|\eta = y\} d\mathbb{P}_\eta(y), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

**Пример 1.** Пусть  $(\xi, \eta)$  — пара случайных величин, имеющих совместное абсолютно непрерывное распределение с плотностью  $f_{\xi, \eta}(x, y)$ . Пусть  $f_\xi(x)$  и  $f_\eta(y)$  — плотности распределения  $\xi$  и  $\eta$  соответственно. Теперь мы готовы обосновать факт с [пятого семинара](#), что плотность условного распределения  $\xi|\eta$  равна

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = g(x, y),$$

где  $g(x, y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_\eta(y)}$ , причём  $g(x, y)$  положим равной нулю, если  $f_\eta(y) = 0$ . Иными словами, нам нужно показать, что

$$\mathbb{P}\{\xi \in C|\eta = y\} = \int_C g(x, y) dx, \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Для этого воспользуемся определением условной вероятности:

$$\mathbb{P}\{\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in C\} \cap \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \in B\}\} = \int_B \mathbb{P}\{\xi \in C|\eta = y\} d\mathbb{P}_\eta(y), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Используя *теорему Фубини*, получим

$$\begin{aligned} \int_B \left[ \int_C g(x, y) dx \right] d\mathbb{P}_\eta(y) &= \int_B \left[ \int_C g(x, y) dx \right] d\mathbb{P}_\eta(y) \\ &= \int_B \left[ \int_C g(x, y) dx \right] f_\eta(y) dy \\ &= \int_{C \times B} g(x, y) = \frac{f_{\xi, \eta}(x, y)}{f_\eta(y)} f_\eta(y) dx dy \\ &= \int_{C \times B} f_{\xi, \eta}(x, y) dx dy \\ &= \mathbb{P}\{\xi \in C, \eta \in B\}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\mathbb{P}\{\xi \in C|\eta = y\} = \int_C g(x, y) dx, \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Аналогичным образом, можно показать, что

$$\mathbb{E}[\xi|\eta = y] = \int_{\mathbb{R}} x f_{\xi|\eta}(x|y) dx.$$

**Замечание 4.** Если в определении  $\mathbb{P}\{A|\eta = y\}$  взять  $B = \mathbb{R}$ , то получим **формулу полной вероятности**:

$$\mathbb{P}\{A\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{A|\eta = y\} d\mathbb{P}_\eta(y).$$

Например, если  $A = \{\omega \in \Omega \mid \varphi(\xi, \eta) < 0\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi(\xi, \eta) < 0\}$ , где  $\varphi(x, y)$  — некоторая борелевская функция, а  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные величины, то

$$\mathbb{P}\{\varphi(\xi, \eta) < 0\} = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\varphi(\xi, \eta) < 0|\eta = y\} d\mathbb{P}_\eta(y) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}\{\varphi(\xi, y) < 0\} d\mathbb{P}_\eta(y).$$