Условное математическое ожидание. Семинар 7. 16 октября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [Ширяев, Гл. 1 §8, Гл. 2 §7], [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 4 §2], [Гнеденко, Гл. 5 §23]

Ключевые слова:условное математическое ожидание относительно события ненулевой меры, условная вероятность относительно разбиения, условная вероятность относительно случайной величины, принимающей конечный набор значений, условное математическое ожидание относительно разбиения

Первая половина семинара — контрольная работа на 40 минут.

Условное математическое ожидание относительно события ненулевой меры

На втором семинаре мы обнаружили, что условная вероятность относительно события ненулевой меры является *вероятностной мерой* на исходном измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$. Следовательно, относительно неё можно ввести интеграл Лебега и определить *математическое ожидание*. Однако мы начнём с эквивалентного определения, записанного в другой форме.

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $B \in \mathcal{F}$ — событие ненулевой вероятностной меры, ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. **Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно события** B называется величина

$$\mathbb{E}[\xi|B] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{E}\left[\xi \cdot \mathbb{I}_B\right]}{\mathbb{P}\{B\}}.$$

Замечание 1. Введённое определение обобщает понятие условной вероятности. Действительно, если рассмотреть произвольное измеримое множество $A \in \mathcal{F}$ и его индикаторную случайную величину $\xi = \mathbb{I}_A$, то её условное математическое ожидание относительно множества B совпадает с условной вероятностью A при условии B:

$$\mathbb{E}[\xi|B] = \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B\right]}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{I}_{A\cap B}\right]}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\left\{A \cap B\right\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \mathbb{P}\{A|B\}.$$

Из определения следует, что

$$\mathbb{E}[\xi|B] = \frac{1}{\mathbb{P}\{B\}} \int\limits_{\Omega} \xi \cdot \mathbb{I}_B d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_{B} \xi \frac{d\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}\{B\}} = \int\limits_{B} \xi d\mathbb{P}(\omega|B) = \int\limits_{\Omega} \xi d\mathbb{P}(\omega|B),$$

где последнее равенство следует, из того, что $\mathbb{P}\{\overline{B}|B\} = 0$. Итак, условное математическое ожидание относительно события ненулевой вероятностной меры есть интеграл Лебега относительно вероятностной меры $\mathbb{P}\{\cdot \mid B\}$. Если переписать это утверждение через интеграл Стильтьеса, то получим

$$\mathbb{E}[\xi|B] = \int\limits_{\mathbb{R}^n} x dF_\xi(x|B),$$

где $F_\xi(x|B) = \mathbb{P}\{\xi < x|B\}$.

Пусть теперь $B_1, B_2, \ldots$ — конечное или счётное объединение попарно непересекающихся множеств ненулевой меры. Тогда из формулы полной вероятности

$$F(x) = \sum_i \mathbb{P}\{B_i\} F(x|B_i)$$

и представления условного математического ожидания относительно события через интеграл Стильтьеса получаем **формулу полного математического ожидания:**

$$\mathbb{E}\xi = \sum_i \mathbb{P}\{B_i\}\mathbb{E}[\xi|B_i].$$

Данная формула оказывается очень удобной для вычисления математических ожиданий.

Пример 1. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — независимые одинаково распределённые случайные величины с конечными математическими ожиданиями, N — случайная величина, независящая от них, принимающая натуральные значения и имеющая конечное математическое ожидание. Определим случайную величину $\eta = \sum\limits_{i=1}^{N} \xi_i$. Докажите *тождество Вальда*:

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi_1 \cdot \mathbb{E}N.$$

Доказательство. Рассмотрим события $B_n = \{N = n\}$. Тогда

$$\mathbb{E}\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N=n\}\mathbb{E}[\eta|B_n] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N=n\}\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{N=n\}\cdot n\mathbb{E}\xi_1 = \mathbb{E}\xi_1 \sum_{n=1}^{\infty} n\mathbb{P}\{N=n\} = \mathbb{E}\xi_1 \cdot \mathbb{E}N.$$

□

Условное математическое ожидание относительно разбиения

Двигаясь от частного к общему, мы сначала определим условное математическое ожидание относительно разбиения для дискретных случайных величин, а затем дадим определение в общем случае.

Итак, пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — дискретное вероятностное пространство и $D = \{B_1, \ldots, B_n\}$ — **разбиение** Ω, т. е. $B_i \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{B_i\} > 0$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$.

Определение 2. Условной вероятностью события $A \in \mathcal{F}$ **относительно разбиения** D называется *случайная величина*

$$\mathbb{P}\{A|D\}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A|B_i\}\mathbb{I}_{B_i}(\omega).$$

Отметим, что данная случайная величина является простой и принимает на множествах B_i значения $\mathbb{P}\{A|B_i\}$. Перечислим простейшие свойства условной вероятности относительно разбиения.

1. Для любых $A, B \in \mathcal{F}$ таких, что $A \cap B = \varnothing$, выполнено: $\mathbb{P}\{A \cup B|D\}(\omega) = \mathbb{P}\{A|D\}(\omega) + \mathbb{P}\{B|D\}(\omega)$.
2. Если $D = \{\Omega\}$ (тривиальное разбиение), то $\mathbb{P}\{A|D\}(\omega) = \mathbb{P}\{A\}$.
3. $\mathbb{E}[\mathbb{P}\{A|D\}(\omega)] = \mathbb{P}\{A\}$ (формула полной вероятности).

Рассмотрим теперь некоторую случайную величину η, принимающую конечное число значений:

$$\eta(\omega) = \sum_{i=1}^{n} y_i \mathbb{I}_{B_i}(\omega),$$

где $B_i = \{\omega \mid \eta(\omega) = y_i\}$. Разбиение $D_\eta = \{B_1, \ldots, B_n\}$ называется **разбиением, порождаемым случайной величиной** η.

Определение 3. Условной вероятностью события $A \in \mathcal{F}$ **относительно случайной величины** η**, принимающей конечный набор значений** будем называть следующую *случайную величину*:

$$\mathbb{P}\{A|\eta\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{A|D_\eta\}.$$

Данное определение легко обобщается на случай конечного числа случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_m$, имеющих конечное множество значений. Рассмотрим разбиение $D_{\eta_1,\dots,\eta_m}$, состоящее из событий

$$D_{y_1,\dots,y_m} = \{\omega \mid \eta_1(\omega) = y_1, \dots, \eta_m(\omega) = y_m\}$$

для всех возможных наборов $(y_1, \dots, y_m)$.

Определение 4. Условной вероятностью события $A \in \mathcal{F}$ относительно случайных величин $\eta_1, \dots, \eta_m$, принимающих конечный набор значений будем называть следующую *случайную величину*:

$$\mathbb{P}\{A|\eta_1, \dots, \eta_m\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{A|D_{\eta_1,\dots,\eta_m}\}.$$

Рассмотрим случайную величину ξ, принимающую конечное число значений,

$$\xi = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{I}_{A_i}, \quad A_i = \{\omega \mid \xi(\omega) = x_i\}$$

и некоторое разбиение $D = \{B_1, \dots, B_m\}$. Математическое ожидание ξ, как мы знаем, определяется через вероятности $\mathbb{P}\{A_i\}$ по формуле

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{P}\{A_i\}.$$

Если в данной формуле заменить $\mathbb{P}\{A_i\}$ на $\mathbb{P}\{A_i|D\}$, то получим определение **условного математического ожидания ξ, принимающей конечный набор значений, относительно разбиения** D:

$$\mathbb{E}[\xi|D](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{P}\{A_i|D\}(\omega).$$

Отметим, что условное математическое ожидание относительно разбиения — это случайная величина. Кроме того, $\mathbb{E}[\xi|D](\omega)$ для всех ω из одного элемента разбиения B_i принимает одно и то же значение $\sum\limits_{j=1}^{m} x_j \mathbb{P}\{A_j|B_i\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi|B_i]$. Данное наблюдение приводит нас к общему определению математического ожидания относительно разбиения.

Определение 5. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно разбиения $D = \{B_1, \dots, B_n\}$ называется случайная величина

$$\mathbb{E}[\xi|D](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi|B_i] \mathbb{I}_{B_i}(\omega).$$

Перечислим некоторые важные свойства условного математического ожидания относительно разбиения (ξ, η — случайные величины, имеющие конечные мат. ожидания).

1. $\mathbb{E}[a\xi + b\eta|D](\omega) = a\mathbb{E}[\xi|D](\omega) + b\mathbb{E}[\eta|D](\omega)$, где a, b — константы.
2. $\mathbb{E}[\xi|\{\Omega\}](\omega) = \mathbb{E}\xi$.
3. $\mathbb{E}[C|D] = C$, где C — константа.
4. $\mathbb{E}[\mathbb{I}_A|D] = \mathbb{P}\{A|D\}$.
5. $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|D]\right] = \mathbb{E}\xi$ (обобщение формулы полной вероятности). Действительно,

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|D]\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi|B_i]\mathbb{I}_{B_i}\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi|B_i]\mathbb{E}[\mathbb{I}_{B_i}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{E}[\xi \mathbb{I}_{B_i}]}{\mathbb{P}\{B_i\}} \cdot \mathbb{P}\{B_i\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[\xi \mathbb{I}_{B_i}] = \mathbb{E}\left[\xi \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{B_i}\right] = \mathbb{E}\xi$$

   в силу того, что B_i образуют разбиение Ω.

6. Если $\eta = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbb{I}_{B_i}$, то $\mathbb{E}[\xi\eta|D](\omega) = \eta(\omega)\mathbb{E}[\xi|D](\omega)$. Действительно, для всех $\omega \in B_i$ выполняется $\mathbb{E}[\xi\eta|D](\omega) = \mathbb{E}[\xi\eta|B_i] = x_i\mathbb{E}[\xi|B_i] = \eta(\omega)\mathbb{E}[\xi|D](\omega)$.

Упражнение 1. Показать, что если $\mathbb{D}\xi < \infty$, то $\mathbb{E}[\xi|D]$ минимизирует средний квадрат отклонения $\mathbb{E}\left[(\xi-\eta)^2\right]$ среди всех случайных величин η, измеримых относительно σ-алгебры, порождённой разбиением D.

Доказательство. Во-первых, заметим, что случайные величины, измеримые относительно σ-алгебры, порождённой разбиением D, являются те и только те случайные величины, которые принимают постоянные значения на элементах разбиения B_i. Во-вторых, используя формулу полного математического ожидания, получим

$$\mathbb{E}\left[(\xi-\eta)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\xi-\eta)^2|B_i\right]\mathbb{P}\{B_i\} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\xi-x_i)^2|B_i\right]\mathbb{P}\{B_i\},$$

где x_i — значения, принимаемые случайной величиной η, на элементах разбиения B_i. На семинаре 4 было показано, что $a* = \mathbb{E}\xi$ минимизирует выражение $\mathbb{E}\left[(\xi-a)^2\right]$ по a. Аналогично и здесь можно показать, что оптимальные значения случайной величины на элементах разбиения будут равны $y_i^* = \mathbb{E}[\xi|B_i]$ (нужно лишь заметить, что $\mathbb{E}[\xi|B_i]$ обладает всеми необходимыми свойствами $\mathbb{E}\xi$, которые использовались для аналогичного результата для дисперсии). $\square$

Данное упражнение показывает, что условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно разбиения D — это проекция в пространстве L_2 (было определено на четвёртом семинаре) случайной величины ξ на подпространство случайных величин, измеримых относительно $\sigma(D)$, то есть оператор условного математического ожидания относительно разбиения является проектором на указанное подпространство.

Рассмотрим конечное число случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_m$, имеющих конечное множество значений. Рассмотрим разбиение $D_{\eta_1,\ldots,\eta_m}$, состоящее из событий

$$D_{y_1,\ldots,y_m} = \{\omega \mid \eta_1(\omega) = y_1, \ldots, \eta_m(\omega) = y_m\}$$

для всех возможных наборов $(y_1, \ldots, y_m)$.

Определение 6. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_m$ будем называть следующую *случайную величину*:

$$\mathbb{E}[\xi|\eta_1, \ldots, \eta_m] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi|D_{\eta_1,\ldots,\eta_m}].$$

Некоторые свойства, следующие из определения:

1) если ξ и η независимы, то $\mathbb{E}[\xi|\eta] = \mathbb{E}\xi$;

2) $\mathbb{E}[\eta|\eta] = \eta$.