
Условное математическое ожидание. Семинар 7. 16 октября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [Ширяев, Гл. 1 §8, Гл. 2 §7], [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 4 §2], [Гнеденко, Гл. 5 §23]

Ключевые слова: УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СОБЫТИЯ НЕНУЛЕВОЙ МЕРЫ, УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗБИЕНИЯ, УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ПРИНИМАЮЩЕЙ КОНЕЧНЫЙ НАБОР ЗНАЧЕНИЙ, УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗБИЕНИЯ

Первая половина семинара — контрольная работа на 40 минут.

Условное математическое ожидание относительно события ненулевой меры

На **втором семинаре** мы обнаружили, что условная вероятность относительно события ненулевой меры является *вероятностной мерой* на исходном измеримом пространстве (Ω, \mathcal{F}) . Следовательно, относительно неё можно ввести интеграл Лебега и определить *математическое ожидание*. Однако мы начнём с эквивалентного определения, записанного в другой форме.

Определение 1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $B \in \mathcal{F}$ — событие ненулевой вероятностной меры, ξ — случайная величина на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. **Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно события B** называется величина

$$\mathbb{E}[\xi|B] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{E}[\xi \cdot \mathbb{I}_B]}{\mathbb{P}\{B\}}.$$

Замечание 1. Введённое определение обобщает понятие условной вероятности. Действительно, если рассмотреть произвольное измеримое множество $A \in \mathcal{F}$ и его индикаторную случайную величину $\xi = \mathbb{I}_A$, то её условное математическое ожидание относительно множества B совпадает с условной вероятностью A при условии B :

$$\mathbb{E}[\xi|B] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B]}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{I}_{A \cap B}]}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \mathbb{P}\{A|B\}.$$

Из определения следует, что

$$\mathbb{E}[\xi|B] = \frac{1}{\mathbb{P}\{B\}} \int_{\Omega} \xi \cdot \mathbb{I}_B d\mathbb{P}(\omega) = \int_B \xi \frac{d\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}\{B\}} = \int_B \xi d\mathbb{P}(\omega|B) = \int_{\Omega} \xi d\mathbb{P}(\omega|B),$$

где последнее равенство следует из того, что $\mathbb{P}\{\bar{B}|B\} = 0$. Итак, условное математическое ожидание относительно события ненулевой вероятностной меры есть интеграл Лебега относительно вероятностной меры $\mathbb{P}\{\cdot | B\}$. Если переписать это утверждение через интеграл Стильтьеса, то получим

$$\mathbb{E}[\xi|B] = \int_{\mathbb{R}^n} x dF_{\xi}(x|B),$$

где $F_{\xi}(x|B) = \mathbb{P}\{\xi < x|B\}$.

Пусть теперь B_1, B_2, \dots — конечное или счётное объединение попарно непересекающихся множеств ненулевой меры. Тогда из формулы полной вероятности

$$F(x) = \sum_i \mathbb{P}\{B_i\} F(x|B_i)$$

и представления условного математического ожидания относительно события через интеграл Стильтьеса получаем **формулу полного математического ожидания**:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_i \mathbb{P}\{B_i\} \mathbb{E}[\xi|B_i].$$

Данная формула оказывается очень удобной для вычисления математических ожиданий.

Пример 1. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределённые случайные величины с конечными математическими ожиданиями, N — случайная величина, независимая от них, принимающая натуральные значения и имеющая конечное математическое ожидание. Определим случайную величину $\eta = \sum_{i=1}^N \xi_i$. Докажите тождество Вальда:

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi_1 \cdot \mathbb{E}N.$$

Условное математическое ожидание относительно разбиения

Двигаясь от частного к общему, мы сначала определим условное математическое ожидание относительно разбиения для дискретных случайных величин, а затем дадим определение в общем случае.

Итак, пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — дискретное вероятностное пространство и $D = \{B_1, \dots, B_n\}$ — **разбиение** Ω , т. е. $B_i \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{B_i\} > 0$ и $\bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.

Определение 2. Условной вероятностью события $A \in \mathcal{F}$ относительно разбиения D называется случайная величина

$$\mathbb{P}\{A|D\}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{A|B_i\} \mathbb{I}_{B_i}(\omega).$$

Отметим, что данная случайная величина является простой и принимает на множествах B_i значения $\mathbb{P}\{A|B_i\}$. Перечислим простейшие свойства условной вероятности относительно разбиения.

1. Для любых $A, B \in \mathcal{F}$ таких, что $A \cap B = \emptyset$, выполнено: $\mathbb{P}\{A \cup B|D\}(\omega) = \mathbb{P}\{A|D\}(\omega) + \mathbb{P}\{B|D\}(\omega)$.
2. Если $D = \{\Omega\}$ (тривиальное разбиение), то $\mathbb{P}\{A|D\}(\omega) = \mathbb{P}\{A\}$.
3. $\mathbb{E}[\mathbb{P}\{A|D\}(\omega)] = \mathbb{P}\{A\}$ (формула полной вероятности).

Рассмотрим теперь некоторую случайную величину η , принимающую конечное число значений:

$$\eta(\omega) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{I}_{B_i}(\omega),$$

где $B_i = \{\omega \mid \eta(\omega) = y_i\}$. Разбиение $D_\eta = \{B_1, \dots, B_n\}$ называется **разбиением, порождаемым случайной величиной η** .

Определение 3. Условной вероятностью события $A \in \mathcal{F}$ относительно случайной величины η , принимающей конечный набор значений будем называть следующую случайную величину:

$$\mathbb{P}\{A|\eta\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{A|D_\eta\}.$$

Данное определение легко обобщается на случай конечного числа случайных величин η_1, \dots, η_m , имеющих конечное множество значений. Рассмотрим разбиение $D_{\eta_1, \dots, \eta_m}$, состоящее из событий

$$D_{y_1, \dots, y_m} = \{\omega \mid \eta_1(\omega) = y_1, \dots, \eta_m(\omega) = y_m\}$$

для всех возможных наборов (y_1, \dots, y_m) .

Определение 4. Условной вероятностью события $A \in \mathcal{F}$ относительно случайных величин η_1, \dots, η_m , принимающих конечный набор значений будем называть следующую случайную величину:

$$\mathbb{P}\{A|\eta_1, \dots, \eta_m\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{A|D_{\eta_1, \dots, \eta_m}\}.$$

Рассмотрим случайную величину ξ , принимающую конечное число значений,

$$\xi = \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{I}_{A_i}, \quad A_i = \{\omega \mid \xi(\omega) = x_i\}$$

и некоторое разбиение $D = \{B_1, \dots, B_m\}$. Математическое ожидание ξ , как мы знаем, определяется через вероятности $\mathbb{P}\{A_i\}$ по формуле

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{P}\{A_i\}.$$

Если в данной формуле заменить $\mathbb{P}\{A_i\}$ на $\mathbb{P}\{A_i|D\}$, то получим определение **условного математического ожидания** ξ , принимающей конечный набор значений, относительно разбиения D :

$$\mathbb{E}[\xi|D](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{P}\{A_i|D\}(\omega).$$

Отметим, что условное математическое ожидание относительно разбиения — это случайная величина. Кроме того, $\mathbb{E}[\xi|D](\omega)$ для всех ω из одного элемента разбиения B_i принимает одно и то же значение $\sum_{j=1}^m x_j \mathbb{P}\{A_j|B_i\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi|B_i]$. Данное наблюдение приводит нас к общему определению математического ожидания относительно разбиения.

Определение 5. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно разбиения $D = \{B_1, \dots, B_n\}$ называется случайная величина

$$\mathbb{E}[\xi|D](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\xi|B_i] \mathbb{I}_{B_i}(\omega).$$

Перечислим некоторые важные свойства условного математического ожидания относительно разбиения (ξ, η — случайные величины, имеющие конечные мат. ожидания).

1. $\mathbb{E}[a\xi + b\eta|D](\omega) = a\mathbb{E}[\xi|D](\omega) + b\mathbb{E}[\eta|D](\omega)$, где a, b — константы.
2. $\mathbb{E}[\xi|\{\Omega\}](\omega) = \mathbb{E}\xi$.
3. $\mathbb{E}[C|D] = C$, где C — константа.
4. $\mathbb{E}[\mathbb{I}_A|D] = \mathbb{P}\{A|D\}$.
5. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|D]] = \mathbb{E}\xi$ (обобщение формулы полной вероятности).
6. Если $\eta = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}_{B_i}$, то $\mathbb{E}[\xi\eta|D](\omega) = \eta(\omega)\mathbb{E}[\xi|D](\omega)$.

Упражнение 1. Показать, что если $\mathbb{D}\xi < \infty$, то $\mathbb{E}[\xi|D]$ минимизирует средний квадрат отклонения $\mathbb{E}[(\xi - \eta)^2]$ среди всех случайных величин η , измеримых относительно σ -алгебры, порождённой разбиением D .

Данное упражнение показывает, что условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно разбиения D — это проекция в пространстве L_2 (было определено на [четвёртом семинаре](#)) случайной величины ξ на подпространство случайных величин, измеримых относительно $\sigma(D)$, то есть оператор условного математического ожидания относительно разбиения является проектором на указанное подпространство.

Рассмотрим конечное число случайных величин η_1, \dots, η_m , имеющих конечное множество значений. Рассмотрим разбиение $D_{\eta_1, \dots, \eta_m}$, состоящее из событий

$$D_{y_1, \dots, y_m} = \{\omega \mid \eta_1(\omega) = y_1, \dots, \eta_m(\omega) = y_m\}$$

для всех возможных наборов (y_1, \dots, y_m) .

Определение 6. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно случайных величин η_1, \dots, η_m будем называть следующую случайную величину:

$$\mathbb{E}[\xi \mid \eta_1, \dots, \eta_m] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi \mid D_{\eta_1, \dots, \eta_m}].$$

Некоторые свойства, следующие из определения:

- 1) если ξ и η независимы, то $\mathbb{E}[\xi \mid \eta] = \mathbb{E}\xi$;
- 2) $\mathbb{E}[\eta \mid \eta] = \eta$.