
Числовые характеристики случайных величин. Семинар 4. 25 сентября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 3 §6, Гл. 4 §1, 3, 5, 6, 7, Приложение 3], [Коралов, §1.2, 3.1, 3.2, 3.3], [Ширяев, Гл. 2 §6], [Гнеденко, Гл. 4 §22, Гл. 5, §23-26]

Ключевые слова: ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ПО ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЕ, ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА-СТИЛЬТЬЕСА, ИНТЕГРАЛ РИМАНА-СТИЛЬТЬЕСА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, КОВАРИАЦИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ, НЕРАВЕНСТВО КОШИ-БУНЯКОВСКОГО, НЕРАВЕНСТВО ЙЕНСЕНА, НЕРАВЕНСТВО ЮНГА, НЕРАВЕНСТВО ГЁЛЬДЕРА, НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО, НЕРАВЕНСТВО ЛЯПУНОВА

Интеграл Лебега по вероятностной мере и интеграл Стильтьеса

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Интеграл Лебега по вероятностной мере (далее в этом разделе будем называть это просто интегралом) от произвольной измеримой функции определяется в 3 этапа. Начнём с определения для **простых функций**.

Определение 1. Случайная величина $\xi(\omega)$ называется **простой**, если множество её значений конечно.

Определение 2. **Индикатором** множества $A \in \mathcal{F}$ называется простая функция, заданная на элементах Ω следующим образом:

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что любая простая функция $\xi(\omega)$ представима в виде

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{I}_{A_k}(\omega),$$

где $a_k, k = 1, \dots, n$ — **различные** значения, принимаемые ξ , а $A_k = \{\omega \mid \xi(\omega) = a_k\}$. Множества A_k попарно не пересекаются и $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$.

Определение 3. **Интегралом от простой случайной величины** $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{P}\{A_k\}.$$

Интегралом по множеству $A \in \mathcal{F}$ от простой измеримой функции $\xi(\omega)$ называется

$$\int_A \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi(\omega) \mathbb{I}_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Теперь определим интеграл от положительной случайной величины.

Лемма 1. Пусть случайная величина $\xi(\omega) \geq 0$. Тогда существует последовательность $\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых простых функций такая, что $\xi_n \uparrow \xi$ при $n \rightarrow \infty$ (сходимость поточечная, т. е. для каждого $\omega \hookrightarrow \xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$).

Доказательство. Доказательство можно прочитать в [Боровков, Приложение 3, §2, Лемма 1] или [Коралов, Глава 3, §3.1, Теорема 3.1]. □

Определение 4. Интегралом неотрицательной функции $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \xi_n d\mathbb{P},$$

где ξ_n — последовательность простых измеримых функций таких, что $\xi_n \uparrow \xi$ при $n \rightarrow \infty$. Будем говорить, что интеграл $\int \xi d\mathbb{P}$ существует, а ξ интегрируема, если $\int \xi d\mathbb{P} < \infty$.

Интеграл неотрицательной функции корректно определён, т. к. его значения не зависят от выбора последовательности простых функций ξ_n монотонно сходящихся к ξ (см. [Боровков, Приложение 3, §2, Лемма 2] или [Коралов, Гл. 3, §3.1, Теорема 3.4]).

Определение 5. Интегралом от произвольной измеримой функции $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi^+ d\mathbb{P} - \int \xi^- d\mathbb{P}, \quad \xi^\pm = \max\{0, \pm \xi\},$$

если хотя бы одно из значений $\int \xi^\pm d\mathbb{P}$ конечно. В противном случае говорят, что интеграла не существует, а функция ξ не интегрируема.

Нетрудно показать, что $\int \xi d\mathbb{P} < \infty$ тогда и только тогда, когда $\int |\xi| d\mathbb{P} < \infty$. Кроме того, если существует $\int \xi d\mathbb{P}$, то существует и $\int \xi \mathbb{1}_A d\mathbb{P}$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Выполняются привычные свойства интегралов.

1. Если множества $A_i \in \mathcal{F}$ попарно не пересекаются и $\bigcup_i A_i = \Omega$, то

$$\int \xi d\mathbb{P} = \sum_i \int_{A_i} \xi d\mathbb{P}.$$

2. $\int (\xi + \eta) d\mathbb{P} = \int \xi d\mathbb{P} + \int \eta d\mathbb{P}$.
3. Если a — произвольная постоянная, то

$$\int a\xi d\mathbb{P} = a \int \xi d\mathbb{P}.$$

4. Если $\xi \leq \eta$, то $\int \xi d\mathbb{P} \leq \int \eta d\mathbb{P}$.
5. $|\int \xi d\mathbb{P}| \leq \int |\xi| d\mathbb{P}$.
6. Если $c_1 \leq \xi \leq c_2$, то $c_1 \leq \int \xi d\mathbb{P} \leq c_2$ (здесь активно используется тот факт, что \mathbb{P} — вероятностная мера).
7. Если $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$ и $\int \xi d\mathbb{P}$ существует, то $\int \xi d\mathbb{P} = \int \eta d\mathbb{P}$.

Теорема 1. Пусть $g(x)$ — борелевская функция на прямой \mathbb{R} . Определим случайную величину $\eta = g(\xi(\omega))$. Если $\int \eta d\mathbb{P}$ существует, то

$$\int_{\Omega} \eta d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{P}_{\xi}(x).$$

Доказательство. Доказательство можно прочитать в [Боровков, Приложение 3, §3, Теорема 3] или [Коралов, Глава 3, §3.2, Теорема 3.8]. \square

Интеграл в правой части может быть записан также в форме

$$\int g(x) dF_\xi(x).$$

В таком виде он называется **интегралом Лебега-Стильтьеса** от функции $g(x)$ по распределению F_ξ . Более того, если $g(x)$ — непрерывная функция, то интеграл Лебега-Стильтьеса совпадает с интегралом **Римана-Стильтьеса**, равным по определению

$$\int g(x) dF_\xi(x) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} g(\tilde{x}_k) [F_\xi(x_{k+1}) - F_\xi(x_k)],$$

где предел в правой части берётся при мелкости разбиения $\max_k (x_{k+1} - x_k) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$, где $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$ и $\tilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1})$. Можно показать, что предел не зависит от выбора разбиения. Более того, в силу Теоремы 1 мы знаем, что все свойства интеграла Лебега по вероятностной мере сохраняются и для интеграла Римана-Стильтьеса в случае непрерывной $g(x)$.

Перед тем как двигаться дальше рассмотрим следующее упражнение.

Упражнение 1. Докажите, что функция распределения имеет не более чем счётное число точек разрыва.

Пусть $F(x)$ — произвольная функция распределения. Тогда её можно представить в виде суммы $F(x) = F_H(x) + F_D(x)$ непрерывной и дискретных компонент. Действительно, в силу теоремы 1 из конспекта [третьего семинара](#) мы знаем, что любую вероятностную меру на прямой можно представить единственным способом в виде суммы дискретной, сингулярной и абсолютно непрерывных мер. В частности, для функции распределения $F(x)$ рассмотрим вероятностную меру на прямой, которую она задаёт, и обозначим её $\mu = \mu_d + \mu_s + \mu_{ac}$. Как мы помним из предыдущего семинара, и сингулярная, и абсолютно непрерывные меры являются атомарными, т. е. $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \mu_s\{x\} = \mu_{ac}\{x\} = 0$, а значит, функция $F_H(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_s\{(-\infty, x)\} + \mu_{ac}\{(-\infty, x)\}$ является непрерывной. Функция $F_D \stackrel{\text{def}}{=} \mu_d\{(-\infty, x)\}$ является кусочно-постоянной и имеет не более чем счётное число точек разрыва. Поэтому в силу равенства $F(x) = \mu\{(-\infty, x)\}$ мы получаем $F(x) = F_H(x) + F_D(x)$. Пусть x_1, x_2, \dots — точки разрывов $F_D(x)$:

$$p_k = F_D(x_k + 0) - F_D(x_k) > 0.$$

Тогда по определению

$$\int g(x) dF(x) = \sum_k p_k g(x_k) + \int g(x) dF_H(x).$$

Рассмотрим два важнейших частных случая.

1. **Дискретное распределение.** Из определения интеграла Стильтьеса получаем, что в случае дискретного распределения интеграл превращается в сумму (функция распределения F является ступенчатой функцией):

$$\int g(x) dF(x) = \sum_k g(x_k) (F(x_k + 0) - F(x_k)) = \sum_k g(x_k) \mathbb{P}\{\xi = x_k\},$$

где x_1, x_2, \dots — точки скачков $F(x)$.

2. **Абсолютно непрерывное распределение.** В случае абсолютно непрерывного распределения $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ интеграл Стильтьеса превращается в интеграл Римана:

$$\int g(x) dF(x) = \int g(x) f(x) dx.$$

Некоторые свойства интеграла Стильтьеса, вытекающие из определения:

- 1) $\int_a^b dF = F(b) - F(a)$;

$$2) \int_a^b g dF = \int_a^c g dF + \int_c^b g dF;$$

$$3) \int (\alpha g + \beta h) dF = \alpha \int g dF + \beta \int h dF, \text{ где } a, b = \text{const.}$$

Математическое ожидание

Определение 6. Математическим ожиданием случайной величины ξ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется число

$$\mathbb{E}\xi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

если интеграл, стоящий в правой части, существует.

Иными словами, математическое ожидание обобщает понятие среднего для случайной величины, ведь $\int d\mathbb{P}(\omega) = 1$. Кроме того, по теореме 1 справедливо равенство, которое более удобно для практики:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} x dF_{\xi}(x).$$

Следствие 1. Если ξ — дискретная случайная величина, то

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k x_k \mathbb{P}\{\xi = x_k\},$$

где x_1, x_2, \dots — набор значений случайной величины ξ (при условии, что ряд абсолютно сходится; в противном случае говорят, что случайная величина ξ **не имеет математического ожидания**).

Следствие 2. Если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, имеющая плотность распределения $f(x)$, то

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx,$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно (иначе случайная величина ξ **не имеет математического ожидания**).

Следствие 3. Если $g(x)$ — борелевская функция на прямой, то $\eta = g(\xi)$ — тоже случайная величина и

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_{\Omega} g(\xi(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} x dF_{g(\xi)}(x),$$

где последнее равенство следует из теоремы 1.

Из определения следует, что $\mathbb{E}\xi < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}|\xi| < \infty$. Можно показать, что $\mathbb{E}\xi$ не ограничено или не существует, если, например, $F(x) < 1 - \frac{1}{x}$ для всех достаточно больших x .

Основные свойства математического ожидания следуют из свойств интеграла Лебега.

1. Если a и b постоянные, то $\mathbb{E}[a + b\xi] = a + b\mathbb{E}\xi$.
2. $\mathbb{E}[\xi + \eta] = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, если существуют какие-нибудь два участвующих в равенстве математических ожидания. Отметим, что случайные величины совсем не обязательно должны быть независимыми. Данное свойство не совсем очевидно, если задавать математическое ожидание по формулам, которые мы получили в Следствиях 1 и 2, но оно легко получается из определения через интеграл Лебега.
3. Если $a \leq \xi \leq b$, то $a \leq \mathbb{E}\xi \leq b$.
4. $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$.

5. Если $\xi \geq 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\xi = 0$ с вероятностью 1. Данное свойство легко получить, если представить интеграл Лебега по Ω в виде суммы интеграла Лебега по A и B , где $A = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = 0\}$, $B = \Omega \setminus A$.
6. $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{E}\mathbb{1}_A$.
7. Если ξ, η — независимые случайные величины, то $\mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$. Данное свойство доказывается через произведение мер и **теорему Фубини** (см. [[Боровков, Приложение 3, §3, Теорема 4]]).

Пример 1. Пусть ξ — число выпавших очков на игральном кубике. Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^6 k\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Пример 2. Пусть $\xi \sim \text{Ve}(p)$. Найдите $\mathbb{E}\xi$.

Пример 3. Рассмотрим случайную величину ξ с распределением $\mathbb{P}\{\xi = 2^n\} = 2^{-n}$, $n \geq 1$. Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_n 2^n \cdot 2^{-n} = +\infty.$$

У случайной величины η с распределением $\mathbb{P}\{\eta = 2^n\} = \mathbb{P}\{\eta = -2^n\} = 2^{-n-1}$ нет мат. ожидания, так как $\mathbb{E}\xi_+ = \mathbb{E}\xi_- = +\infty$.

Пример 4. Примером абсолютно непрерывной случайной величины, не имеющей мат. ожидания, является случайная величина $\xi \sim \text{Ca}(0, 1)$. Действительно, её плотность $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2+1}$, а интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1} dx$$

не сходится абсолютно.

Упражнение 2. Используя линейность мат. ожидания, найдите мат. ожидания случайной величины $\xi \sim \text{Віном}(n, p)$.

Свойство линейности математического ожидания бывает очень полезно для поиска мат. ожидания количества чего-нибудь. В таких задачах часто работает следующий приём: представляем исходную случайную величину в виде суммы индикаторов каких-то событий (возможно, зависимых) и пользуемся линейностью мат. ожидания.

Упражнение 3. (Задача №79) Имеется n пронумерованных конвертов и n пронумерованных писем. Письма случайным образом раскладываются по конвертам (все $n!$ способов равновероятны). Найдите мат. ожидание числа совпадений номеров письма и конверта (письмо лежит в конверте с тем же номером).

Пример 5. Пусть $\xi \sim \text{Exp}(1)$ (т.е. $F_\xi(x) = 1 - e^{-x}$) и $\eta = \frac{e^\xi \sin \xi}{\xi}$. Тогда существует несобственный интеграл Римана-Стилтьеса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x} dF_\xi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

но $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$, а значит, η не имеет математического ожидания.

Пример 6. Пусть $\xi \sim \mathcal{U}[0, 1]$ и $\eta = R(\xi)$, где

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тогда $\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi = \frac{1}{2}$, т. к. $\xi = \eta$ почти наверное, что означает, что $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$. Однако интеграла Римана (Римана-Стилтьеса) $\int_0^1 R(x) dx$ не существует.

Дисперсия и другие числовые характеристики случайных величин

Определение 7. Величину $\mathbb{E}[\xi^k], k = 1, 2, \dots$ будем называть k -м моментом случайной величины ξ .

Определение 8. Величину $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k], k = 1, 2, \dots$ будем называть **центральный k -м моментом** случайной величины ξ .

Определение 9. **Дисперсией** случайной величины ξ называется второй центральный момент:

$$\mathbb{D}\xi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2].$$

Перечислим некоторые свойства дисперсии.

1. $\mathbb{D}\xi \geq 0$. $\mathbb{D}\xi = 0$ тогда и только тогда, когда существует такая константа c , что $\mathbb{P}\{\xi = c\} = 1$.
2. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}[\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2] = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}\xi)^2$.
3. $\mathbb{D}[a + b\xi] = b^2\mathbb{D}[\xi]$, где $a, b = \text{const}$.
4. Если ξ и η — независимые случайные величины, то $\mathbb{D}[\xi + \eta] = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$.
5. $\mathbb{D}\xi$ минимизирует значение $\mathbb{E}[(\xi - a)^2], a \in \mathbb{R}$.

Упражнение 4. Найти дисперсию случайной величины ξ , если

- (a) $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$;
- (b) $\xi \sim \mathcal{U}[a, b]$.

Пространство L_2

Случайные величины с конечным вторым моментом образуют линейное функциональное пространство $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Кроме того, отождествим случайные величины, которые отличаются на множестве вероятностной меры ноль. Это делается для того, чтобы ввести скалярное произведение:

$$\langle \xi, \eta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi\eta].$$

Действительно, равенство $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ означает только, что $\xi = 0$ почти наверное, но не для любого $\omega \in \Omega$. Но мы их отождествили, поэтому все аксиомы скалярного произведения выполнены. Таким образом, мы получили евклидово пространство. Норма вводится естественным образом: $\|\xi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{D}\xi = \|\xi - \mathbb{E}\xi\|^2.$$

Для скалярного произведения выполняется **неравенство Коши-Буняковского-Шварца**:

$$|\mathbb{E}[\xi\eta]| \stackrel{\text{def}}{=} |\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbb{E}[\xi^2]\mathbb{E}[\eta^2]}.$$

Определение 10. **Ковариацией случайных величин ξ, η** называется число

$$\text{cov}(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)] = \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta.$$

Из неравенства КБШ следует, что для ковариации выполняется неравенство:

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}.$$

Нетрудно видеть, что если ξ, η — независимые, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$. Обратное неверно: если ковариация величин равна 0, из этого не следует их независимость. Тем не менее, ковариация часто используется, как некоторая мера зависимости величин, т.к. ей удобно пользоваться.

Определение 11. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ, η называется число

$$r_{\xi\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}}.$$

Он принимает значения из $[-1, 1]$ и лучше отражает зависимость случайных величин ξ и η . Заметим также, что если $r_{\xi\eta} = 0$, то $\mathbb{D}[\xi + \eta] = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$.

Неравенства, связанные с моментами

Неравенства Коши-Буняковского:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}\xi\eta| &\leq \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2} \\ |\text{cov}(\xi, \eta)| &\leq \sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta} \end{aligned}$$

Неравенство Йенсена:

$$f(\mathbb{E}\xi) \leq \mathbb{E}f(\xi), \quad f - \text{выпуклая функция}$$

Неравенство Юнга:

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|^p}{p} + \frac{\mathbb{E}|\eta|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \geq 0$$

Неравенство Гёльдера:

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \geq 0$$

Неравенство Минковского:

$$(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

Неравенство Ляпунова:

$$(\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}|\xi|^q)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < p \leq q$$