Случайные величины. Примеры распределений. Семинар 3. 18 сентября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [НатанТВ, Гл. 4], [Боровков, Гл. 3 §1, 2, 4], [Коралов, §1.1, 1.5, 3.3], [Ширяев, Гл. 1 §4, Гл. 2 §3, 4], [Гнеденко, Гл. 4 §18, 19]

Ключевые слова: измеримое отображение, случайная величина, минимальная σ-алгебра, порождённая случайной величиной, независимость случайных величин, функция распределения, плотность распределения, дискретная мера, сингулярная мера, абсолютно непрерывная мера, распределение Бернулли, биноминальное распределение, распределение Пуассона, геометрическое распределение, отрицательное биноминальное распределение, равномерное распределение, нормальное распределение, экспоненциальное распределение, распределение Коши, гамма-распределение, распределение хи-квадрат, бета-распределение, логнормальное распределение, преобразование функции распределения и плотности распределения при преобразовании случайной величины

Случайная величина

Определение 1. Пусть $(X, \mathcal{F}_x)$ и $(Y, \mathcal{F}_Y)$ — два измеримых пространства. Отображение $T : X \to Y$ называется **измеримым**, если для любого измеримого множества $A \in \mathcal{F}_Y$ его прообраз

$$T^{-1}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid T(x) \in A\}$$

тоже измерим, то есть $T^{-1}(A) \in \mathcal{F}_X$.

Определение 2. Пусть дано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. **Случайной величиной** ξ будем называть измеримую (*борелевскую*) функцию $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ из $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}$ — борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$.

Упражнение 1. Приведите пример пространства элементарных исходов Ω, функции $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ и двух таких σ-алгебр, что ξ является случайной величиной для одного измеримого пространства, но не является для другого.

Решение. Рассмотрим пространство исходов бросания кости $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и две σ-алгебры: $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \varnothing\}$ (тривиальная σ-алгебра) и $\mathcal{F}_2 = 2^\Omega$ (множество всех подмножеств). Рассмотрим функцию $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, заданную на элементах $\omega \in \Omega$ следующим образом: $\xi(\omega) = \omega \mod 2$. Тогда относительно второй σ-алгебры ξ является случайной величиной, но не является случайной величиной относительно первой σ-алгебры, т. к. прообраз борелевского множества $\{0\}$ равен $\xi^{-1}(\{0\}) = \{2, 4, 6\} \notin \mathcal{F}_1$. $\square$

Определение 3. Распределением случайной величины ξ называется вероятностная мера $\mathbb{P}_\xi$ на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}$ такая, что для любого $B \in \mathcal{B}$

$$\mathbb{P}_\xi\{B\} = \mathbb{P}\{\xi \in B\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\left\{\xi^{-1}(B)\right\}.$$

Иногда вероятностную меру $\mathbb{P}_\xi$ называют образом меры $\mathbb{P}$ при отображении ξ. Если $\mathbb{P}_\xi = \mu$, то будем говорить, что ξ распределена согласно μ: $\xi \sim \mu$.

Замечание 1. Распределение случайной величины определено с точностью до множества нулевой меры. Случайные величины, которые отличаются на множестве меры нуль, будем называть **эквивалентными**.

Определение 4. Минимальная σ-алгебра, порождённая случайной величиной ξ, — это минимальная σ-алгебра, содержащая прообразы всех борелевских множеств:

$$\sigma(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sigma\left(\{\xi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}\right) = \{\xi^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{B}\}.$$

Последнее равенство в определении корректно, поскольку взятие полного прообраза сохраняет операции над множествами, а именно:

1) $\xi^{-1}(\overline{B}) = \overline{\xi^{-1}(B)}$;

2) $\xi^{-1}\left(\bigcup\limits_i B_i\right) = \bigcup\limits_i \xi^{-1}(B_i)$.

Следовательно, полный прообраз σ-алгебры тоже является σ-алгеброй.

Определение 5. Случайные величины ξ и η называются **независимыми**, если независимы порождённые ими минимальные σ-алгебры, т. е. любые события $A \in \sigma(\xi), B \in \sigma(\eta)$. Это эквивалентно тому, что для любых борелевских множеств B_1, B_2 выполняется

$$\mathbb{P}\{\xi \in B_1, \eta \in B_2\} = \mathbb{P}\{\xi \in B_1\}\mathbb{P}\{\eta \in B_2\}.$$

Определение 6. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называются **независимыми в совокупности**, если независимы в совокупности порождённые ими минимальные σ-алгебры, т. е. любые события $A_1 \in \sigma(\xi_1), \ldots, A_n \in \sigma(\xi_n)$. Это эквивалентно тому, что для любых борелевских множеств $B_1, \ldots, B_n$ выполняется

$$\mathbb{P}\{\xi_1 \in B_1, \ldots, \xi_n \in B_n\} = \mathbb{P}\{\xi_1 \in B_1\} \ldots \mathbb{P}\{\xi_n \in B_n\}.$$

Функция и плотность распределения

Теорема 1. (Лебег) Пусть ν — стандартная мера Лебега на $\mathbb{R}$, μ — некоторая вероятностная мера, заданная на борелевской σ-алгебре на $\mathbb{R}$. Тогда μ можно однозначно представить в виде суммы трёх мер $\mu = \mu_d + \mu_s + \mu_{ac}$, где

1) μ_d — **дискретная мера**, т. е. существует не более чем счётное множество точек $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \in \mathcal{B}$, что $\mu_d(A) = \mu_d(\mathbb{R})$ (иными словами, мера сосредоточена в не более чем счётном числе точек),

2) μ_s — **сингулярная мера**, т. е. существует такое борелевское множество S, что $\nu(S) = 0$ и $\mu_s(S) = \mu_s(\mathbb{R})$, причём для любой точки $x \in \mathbb{R}$ её мера равна нулю $\mu_s(\{x\}) =$ (безатомность),

3) μ_{ac} — **абсолютно непрерывная мера**, т. е. для любого борелевского множества A из $\nu(A) = 0$ следует $\mu_{ac}(A) = 0$; по теореме Радона-Никодима это эквивалентно существованию такой неотрицательной измеримой функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что для любого измеримого множества B выполняется $\mu_{ac}(B) = \int\limits_B f(x)dx$ (интеграл Лебега); функция f называется **плотностью меры** (или производной Радона-Никодима), и она определена с точностью до множества нулевой лебеговой меры.

Доказательство. Данную теорему мы оставим без доказательства. Достаточно короткое доказательство можно найти в **[Коралов, §3.3, Теорема 3.16]** □

Заметим, что распределение *дискретной* случайной величины ξ, т. е. случайной величины, принимающей значения из не более чем счётного множества $\{x_1, x_2, \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$, однозначно задаётся её **функцией вероятности**, т. е. значениями $\mathbb{P}\{X = x_i\}$. В общем случае распределение описывается с помощью **функции распределения**.

Определение 7. Функцией распределения случайной величины ξ называется такая функция $F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1]$, что $F_\xi(x) = \mathbb{P}\{\xi < x\}$.

Соответствие между вероятностными мерами и функциями распределения является взаимно-однозначным. Вообще говоря, F_ξ задаёт меру $\mathbb{P}_F$ на алгебре промежутков $\mathcal{A}$: $\mathbb{P}_F\{[a_1, b_1) \cup \ldots \cup [a_n, b_n)\} \overset{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n}(F(b_i) - F(a_i))$. Эта мера счётно-аддитивна, поэтому однозначно продолжается на борелевскую σ-алгебру по *теореме Каратеодори о продолжении меры* (см. **[Коралов, §3.4, Теорема 3.19]**) следующим образом: $\mathbb{P}_F\{A\} \overset{\text{def}}{=} \inf\{\sum\limits_i \mathbb{P}_F\{B_i\} \mid A \subseteq \bigcup\limits_i B_i, B_i \in \mathcal{A}\}$.

Также верна следующая теорема, которую мы рассмотрим без доказательства.

Теорема 2. Случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_n$ независимы в совокупности тогда и только тогда, когда для любых $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\{\xi < x_1, \ldots, \xi_n < x_n\} = \prod_{i=1}^{n} F_{\xi_i}(x_i).$$

Вероятностная мера отрезков и интервалов выражается через функцию распределения следующим образом:

1) $\mathbb{P}\{\xi \leqslant a\} = \lim\limits_{t \to +0} \mathbb{P}\{\xi < a + t\} = F_\xi(x + 0)$;
2) $\mathbb{P}\{\xi \geqslant a\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi < a\} = 1 - F_\xi(a)$;
3) $\mathbb{P}\{\xi > a\} = 1 - \mathbb{P}\{\xi \leqslant a\} = 1 - F_\xi(a + 0)$;
4) $\mathbb{P}\{a < \xi < b\} = \mathbb{P}\{\xi < b\} - \mathbb{P}\{\xi \leqslant a\} = F_\xi(b) - F_\xi(a + 0)$;
5) $\mathbb{P}\{a \leqslant \xi \leqslant b\} = \mathbb{P}\{\xi \leqslant b\} - \mathbb{P}\{\xi < a\} = F_\xi(b + 0) - F_\xi(a)$;
6) $\mathbb{P}\{a \leqslant \xi < b\} = \mathbb{P}\{\xi < b\} - \mathbb{P}\{\xi < a\} = F_\xi(b) - F_\xi(a)$;
7) $\mathbb{P}\{a < \xi \leqslant b\} = \mathbb{P}\{\xi \leqslant b\} - \mathbb{P}\{\xi \leqslant a\} = F_\xi(b + 0) - F_\xi(a + 0)$.

Перечислим и докажем **свойства функции распределения**.

1. $F_\xi(x)$ является неубывающей функцией. Действительно, в силу $\{\xi < x\} \subseteq \{\xi < y\}$ для $x < y$ и в силу монотонности вероятности получаем, что $F_\xi(x) \leqslant F_\xi(y)$.

2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$ и $\lim\limits_{\xi \to +\infty} F_\xi(x) = 1$. Докажем первое равенство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, монотонно стремящуюся к $-\infty$: $x_n \xrightarrow{n \to \infty} [-\infty], x_n > x_{n+1}$. Рассмотрим события $B_n = \{\xi < x_n\}$. Тогда $B_i \supseteq B_{i+1}$. Заметим, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$. Применяя теорему непрерывности вероятности, получаем, что $0 = \mathbb{P}\{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n\} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}\{B_n\} = \lim\limits_{n \to \infty} F_\xi(x_n)$. В силу произвольности выбора последовательности, получаем $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$. Второе равенство доказывается аналогично.

3. $F_\xi(x)$ непрерывна слева во всех точках $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R} \hookrightarrow \lim\limits_{t \to x-0} F_\xi(t) = F_\xi(x)$. Рассмотрим произвольную возрастающую последовательность t_n, стремящуюся к x, и рассмотрим события $B_n = \{t_n \leqslant \xi < x\}$. Тогда $B_n \supseteq B_{n+1}$ для любого n и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n = \varnothing$, а из теоремы непрерывности вероятности получаем, что $0 = \mathbb{P}\{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n\} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}\{B_n\} = \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}\{t_n \leqslant \xi < x\}$. В силу произвольности выбора возрастающей последовательности t_n получаем отсюда, что $0 = \lim\limits_{t \to x-0} \mathbb{P}\{t \leqslant \xi < x\} = \lim\limits_{t \to x-0} (F_\xi(x) - F_\xi(t)) = F_\xi(x) - \lim\limits_{t \to x-0} F_\xi(t)$.

Следующую теорему рассмотрим без доказательства.

Теорема 3. Если функция $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ удовлетворяет свойствам 1-3, то она является функцией распределения некоторой случайно величины.

Когда мы рассматривали теорему Лебега, то убедились (поверили), что вероятностная мера на $\mathbb{R}$ однозначно представляется в виде суммы дискретной, сингулярной и абсолютно непрерывной мер. Соответственно, существуют дискретные, сингулярные и абсолютно непрерывные распределения, а также их смеси. В рамках нашего курса основное внимание будет уделено дискретным и абсолютно непрерывным распределениям, то есть распределениям которые соответствуют дискретным и абсолютно непрерывным вероятностным мерам на $\mathbb{R}$. Зафиксируем определения, которыми и будем дальше пользоваться.

Определение 8. Распределение случайной величины ξ называется **дискретным**, если ξ может принимать конечное или счётное число значений $x_1, x_2, \ldots$ таких, что

$$p_k = \mathbb{P}\{\xi = x_k\} > 0, \quad \sum_k p_k = 1.$$

Определение 9. Распределение $\mathbb{P}$ случайной величины ξ называется **абсолютно непрерывным** (относительно меры Лебега), если существует така неотрицательная функция $f(x)$, что для любого борелевского множества B

$$\mathbb{P}\{\xi \in B\} = \int\limits_B f(x)dx \text{ (интеграл Лебега).}$$

Функция $f(x)$ называется **плотностью распределения**.

Примеры распределений

Пример 1. Примеры дискретных распределений:

1) распределение Бернулли: $\xi \sim \mathrm{Be}(p) \Leftrightarrow \mathbb{P}\{\xi = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k \in \{0, 1\}$;
2) биномиальное распределение: $\xi \sim \mathrm{Binom}(n, p) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$;
3) распределение Пуассона: $\xi \sim \mathrm{Poisson}(\lambda) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{Z}_+$;
4) геометрическое распределение: $\xi \sim \mathrm{Geom}(p) \Leftrightarrow \mathbb{P}(\xi = k) = p(1-p)^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$;
5) отрицательное биномиальное распределение: $\xi \sim \mathrm{NB}(n, p)$: $\mathbb{P}(\xi = k) = C_{k+n-1}^k p^n (1-p)^k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Пример 2. Примеры непрерывных распределений:

1) равномерное распределение на отрезке: $\xi \sim \mathcal{U}[a, b] \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{b-a}$, $a \leqslant x \leqslant b$;
2) нормальное распределение: $\xi \sim \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, $x \in \mathbb{R}$;
3) экспоненциальное распределение: $\xi \sim \mathrm{Exp}(\lambda) \Leftrightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$;
4) распределение Коши: $\xi \sim \mathrm{Ca}(m, \gamma) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma}{(x-m)^2 + \gamma^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
5) гамма-распределение: $\xi \sim \mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}$, $x \geqslant 0$;
6) хи-квадрат с n степенями свободы $\xi \sim \chi^2(n) = \mathrm{Gamma}\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\frac{1}{2}^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}$, $x \geqslant 0$;
7) бета-распределение: $\xi \sim \mathrm{Beta}(\alpha, \beta) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$;
8) логнормальное распределение: $\xi \sim \log\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - m)^2}{2\sigma^2}}$, $x \geqslant 0$.

Пример 3. Рассмотрим схему испытаний Бернулли, в которой вероятность успеха равна p. Тогда число успехов после n испытаний — случайная величина с распределением $\mathrm{Binom}(n, p)$.

Доказательство. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимые в совокупности случайные величины, имеющие распределение $\mathrm{Be}(p)$, $X_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ — случайная величина, соответствующая числу успехов в первых n испытаниях. Тогда для любого $k \in [n] = \{1, 2, \ldots, n\} \hookrightarrow \mathbb{P}\{X_n = k\} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ (выбирается k элементов из n элементов, после чего ищется вероятность, что выбранный набор состоит из всех успехов, произошедших среди первых n испытаний). $\square$

Пример 4. Рассмотрим схему испытаний Бернулли, в которой вероятность успеха равна p. Тогда число неудач до первого успеха — случайная величина с распределением $\mathrm{Geom}(p)$.

Доказательство. Внимательно смотрим на определения и понимаем, что это так. □

Упражнение 2. (Задача №51) Пусть случайная величина ξ имеет показательное распределение $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Покажите, что имеет место "отсутствие последействия":

$$\mathbb{P}\{\xi \geqslant x+y | \xi \geqslant x\} = \mathbb{P}\{\xi \geqslant y\}, \quad x, y \geqslant 0.$$

Доказательство. Действительно,

$$\mathbb{P}\{\xi \geqslant x+y | \xi \geqslant x\} = \frac{\mathbb{P}\{\xi \geqslant x+y, \xi \geqslant x\}}{\mathbb{P}\{\xi \geqslant x\}} = \frac{\mathbb{P}\{\xi \geqslant x+y\}}{\mathbb{P}\{\xi \geqslant x\}} = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda y} = \mathbb{P}\{\xi \geqslant y\}.$$

□

Преобразование функции распределения и плотности распределения при преобразованиях случайных величин

Пусть ξ — случайная величина, $\varphi(\cdot)$ — борелевская функция и $\eta = \varphi(\xi)$. Тогда η также является случайной величиной и

$$F_\eta(y) = \mathbb{P}\{\eta < y\} = \mathbb{P}\{\varphi(\xi) < y\} = \mathbb{P}\{\xi \in \varphi^{-1}((-\infty, y))\}.$$

Если $\varphi(\cdot)$ – непрерывная возрастающая функция, то существует обратная функция и

$$F_\eta(y) = \mathbb{P}\{\eta < y\} = \mathbb{P}\{\varphi(\xi) < y\} = \mathbb{P}\left\{\xi < \varphi^{-1}(y)\right\} = F_\xi\left(\varphi^{-1}(y)\right),$$

Если дополнительно ξ абсолютно непрерывна, а $\varphi(\cdot)$ дифференцируема, $y = \varphi(x)$ и $\varphi'(x) \neq 0$ для почти всех x, то существует плотность $f_\eta(y)$, причем

$$f_\eta(y) = \frac{f_\xi(x)}{|\varphi'(x)|}.$$

В общем случае

$$f_\eta(y) = \sum_{x:\varphi(x)=y} \frac{f_\xi(x)}{|\varphi'(x)|}.$$

Данную формулу можно получить, используя теорему о замене переменных в интеграле и определение плотности распределения.

Упражнение 3. Пусть случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения F. Показать, что случайная величина $F(\xi)$ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное число $x \in [0,1]$. Тогда в силу монотонности и непрерывности функции распределения

$$\mathbb{P}\{F(\xi) < x\} = \mathbb{P}\{\xi < F^{-1}(x)\} = F\left(F^{-1}(x)\right) \Rightarrow F(\xi) \in \mathcal{U}[0,1],$$

где $F^{-1}(x) = \inf\{y \mid F(y) = x\}$. □

Упражнение 4. Пусть $\xi \sim \mathcal{U}[0,1]$, F — непрерывная функция распределения некоторой случайной величины. Определим

$$F^{-1}(y) = \inf\{x \mid F(x) = y\}.$$

Показать, что случайная величина $F^{-1}(\xi)$ имеет функцию распределения F.

Доказательство. Заметим, что в силу непрерывности F мы имеем: $F\left(F^{-1}(y)\right) = y$. Кроме того, заметим, что в силу неубывания функции F выполняется:

$$F^{-1}(y) < z \Leftrightarrow y < F(z).$$

Отсюда следует, что

$$\mathbb{P}\{F^{-1}(\xi) < x\} = \mathbb{P}\{\xi < F(x)\} = F(x),$$

так как $\xi \sim \mathcal{U}[0,1]$. □