Формула включений-исключений. Независимость событий. Условная вероятность. Семинар 2. 11 сентября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [НатанТВ, Гл. 3], [Боровков, Гл.2 §3, 4], [Коралов, §4.1 и 4.2], [Ширяев, Гл. 1 §3], [Гнеденко, Гл. 1 §7]

Ключевые слова: формула включений-исключений, условная вероятность, независимость событий, формула полной вероятности, формула Байеса

Формула включений-исключений

Теорема 1. Формула включений-исключений. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$ — конечный набор событий. Пусть $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, и для произвольного подмножества индексов $J \subseteq [n]$ определим событие $B_J = \bigcap\limits_{i\in J} A_i$. Тогда справедлива следующая формула, называемая формулой включений-исключений:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} &= \sum_{J\subseteq[n]} (-1)^{|J|+1}\mathbb{P}\{B_J\}\\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}\{A_i\cap A_j\} + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\}.\end{aligned}$$

Доказательство. Докажем формулу включений-исключений индукцией по n.
База индукции: $n = 2$. Для случая $n = 2$ определим события $C_1 = A_1 \setminus A_2, C_2 = A_1 \cap A_2, C_3 = A_2 \setminus A_1$, обладающими следуюшими свойствами:

1) $C_i \cap C_j = \varnothing$ для $i \neq j$;

2) $A_1 \cup A_2 = C_1 \cup C_2 \cup C_3, A_1 = C_1 \cup C_2, A_2 = C_2 \cup C_3$.

Отсюда и из счётной аддитивности вероятностной меры получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{A_1\cup A_2\} &= \mathbb{P}\{C_1\cup C_2\cup C_3\} = \mathbb{P}\{C_1\} + \mathbb{P}\{C_2\} + \mathbb{P}\{C_3\} = (\mathbb{P}\{C_1\} + \mathbb{P}\{C_2\}) + (\mathbb{P}\{C_3\} + \mathbb{P}\{C_2\}) - \mathbb{P}\{C_2\}\\ &= \mathbb{P}\{\underbrace{C_1\cup C_2}_{A_1}\} + \mathbb{P}\{\underbrace{C_2\cup C_3}_{A_2}\} - \mathbb{P}\{\underbrace{C_2}_{A_1\cap A_2}\} = \mathbb{P}\{A_1\} + \mathbb{P}\{A_2\} - \mathbb{P}\{A_1\cap A_2\}.\end{aligned}$$

База индукции доказана.
Шаг индукции. Предположим, что формула включений-исключений верна для произвольных наборов из не более чем $n-1$ событий, и докажем, что она верна для произвольного набора $\{A_i\}_{i=1}^n$ из n событий. Рассматривая формулу включений-исклчений для событий $\bigcup\limits_{i=1}^{n-1} A_i$ и A_n, которую мы уже доказали, получим

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right\} + \mathbb{P}\{A_n\} - \mathbb{P}\left\{\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right)\cap A_n\right\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right\} + \mathbb{P}\{A_n\} - \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n-1}(A_i\cap A_n)\right\}.$$

Применяя предположение индукции для наборов множеств $\{A_i\}_{i=1}^{n-1}$ и $\{A_i \cap A_n\}_{i=1}^n$, получим

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \mathbb{P}\{A_i\cap A_j\} + \ldots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}\{A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n\}.$$

□

Упражнение 1. После официальной части «посвята» n первокурсников собрались на культурное чаепитие в одной из комнат седьмого общежития. Каждый из первокурсников оставил свою куртку на вешалке в комнате. В 23:00 все вспомнили, что пора готовиться к коллоквиуму по математическому анализу, и побежали в свои комнаты, чтобы поскорее продолжить ботать. При этом каждый схватил куртку случайно из имеющихся, так как нужно было спешить. Найдите вероятность того, что ни один из первокурсников не взял свою куртку, и найдите предел этой вероятности при $n \to \infty$.

Решение. Элементарными событиями в этой задаче будем считать все возможные перестановки n курток. Всего таких перестановок $n!$. Считаем, что все перестановки равновероятны. Пусть событие A_k соответствует тому, что k-й первокурсник взял свою куртку. Тогда $\mathbb{P}\{A_k\} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$, так как перестановок, при которых k-й человек взял свою куртку, всего $(n-1)!$. Заметим, что событие $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}$ соответствует тому, что i_1-й, i_2-й, $\ldots$, i_r-й первокурсники взяли свои куртки, а вероятность этого события $\mathbb{P}\{A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_r}\} = \frac{(n-r)!}{n!}$. Отсюда получаем, что

$$\sum_{J \subseteq [n] : |J| = r} \mathbb{P}\{B_J\} = \frac{(n-r)!}{n!} \binom{n}{r} = \frac{1}{r!},$$

где $B_J = \bigcap\limits_{i \in J} A_i$. Пусть событие C, соответствует тому, что ни один из первокурсников не взял свою куртку. Тогда $C = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ и

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{C\} &= \mathbb{P}\{\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\} = 1 - \mathbb{P}\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i\} \\
&\overset{\text{ф-ла вкл.-искл.}}{=} 1 - \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} + \ldots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\{A_1 \cap \ldots \cap A_n\} \right) \\
&= 1 - \left(1 - \tfrac{1}{2!} + \tfrac{1}{3!} + \ldots + \tfrac{(-1)^{n+1}}{n!}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} 1 - \tfrac{1}{e}.
\end{aligned}$$

□

Независимость событий

Везде далее рассматривается некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Определение 1. События A и B называются **независимыми**, если $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\}$.

Заметим, что если $A = \varnothing$ или $A = \Omega$, то оно независимо от любого события B. На самом деле, верен даже чуть более общий результат: если $\mathbb{P}\{A\} = 0$ или $\mathbb{P}\{A\} = 1$, от оно независимо от любого события B (*подсказка:* в первом случае воспользуйтесь монотонностью вероятностной меры; во втором случае рассмотрите события A и $B \setminus A$ и вероятность $\mathbb{P}\{A \cup B\}$).

Упражнение 2. Пусть (A, B) — пара независимых событий. Покажите, что $(\overline{A}, B), (A, \overline{B}), (\overline{A}, \overline{B})$ — также пары независимых событий.

Решение. Если независимы A и B, то

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\overline{A} \cap B\} &= \mathbb{P}\{B \setminus A\} = \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\} \\
&= \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{B\}(1 - \mathbb{P}\{A\}) = \mathbb{P}\{\overline{A}\} \cdot \mathbb{P}\{B\},
\end{aligned}$$

т.е. $\overline{A}$ и B независимы. Поменяв местами A и B в предыдущей выкладке, мы получим независимость A и $\overline{B}$, а заменив B на $\overline{B}$ и воспользовавшись предыдущей выкладкой и независимостью A и $\overline{B}$, мы получим независимость $\overline{A}$ и $\overline{B}$. □

Если между событиями есть причинно-следственная связь, например, $A \subset B$ и $0 < \mathbb{P}\{A\} \leqslant \mathbb{P}\{B\} < 1$, то они являются зависимыми и в вероятностном смысле: $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} \neq \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\}$. Обратное, вообще говоря, неверно: из вероятностной зависимости может не следовать причинно-следственная зависимость.

Определение 2. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если для любого $k, 2 \leqslant k \leqslant n$ и любых индексов $i_1, \ldots, i_k$ таких, что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$, выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right\} = \prod_{j=1}^{k} \mathbb{P}\{A_{i_j}\}.$$

Из независимости в совокупности легко следует попарная независимость событий. Обратно, вообще говоря, неверно при $n \geqslant 3$.

Упражнение 3. (Задача №37) Приведите пример вероятностного пространства и трёх событий на этом пространстве, которые попарно независимы, но зависимы в совокупности.

Решение. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ и $\mathbb{P}\{\omega_i\} = \frac{1}{4}$ для всех i. Рассмотрим события $A = \{\omega_1, \omega_2\}, B = \{\omega_2, \omega_3\}, C = \{\omega_1, \omega_3\}$. Тогда $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{C\} = \frac{1}{2}$ и

$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{\omega_2\} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\},$$
$$\mathbb{P}\{B \cap C\} = \mathbb{P}\{\omega_3\} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\{B\}\mathbb{P}\{C\},$$
$$\mathbb{P}\{A \cap C\} = \mathbb{P}\{\omega_1\} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{C\},$$

но $\mathbb{P}\{A \cap B \cap C\} = \mathbb{P}\{\varnothing\} = 0 \neq \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}\mathbb{P}\{C\} = \frac{1}{8}$. □

Условная вероятность

Определение 3. Условной вероятностью события A при условии события B, имеющего ненулевую вероятность ($\mathbb{P}\{B\} > 0$), называется число

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}}.$$

Пример 1. Пусть известно, что при бросании двух костей в сумме выпало больше 6 (событие B). Какова вероятность, что на первой кости выпало не больше 2 (событие A)?

Решение. $\mathbb{P}\{A|B\} = \dfrac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \dfrac{\frac{1}{36} + \frac{2}{36}}{\frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{3}{21} = \frac{1}{7}$. □

Условная вероятность зависит и от A, и от B, но зависит по-разному. Как функция от A условная вероятность обладает обычными свойствами вероятности:

1) $\mathbb{P}\{A|B\} \geqslant 0$;

2) $\mathbb{P}\{\Omega|B\} = \frac{\mathbb{P}\{\Omega \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = 1$;

3) для конечной или бесконечной последовательности попарно непересекающихся событий A_i и для $A = \bigcup\limits_i A_i$ выполняется равенство

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\left(\bigcup\limits_i A_i\right) \cap B\right\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_i (A_i \cap B)\right\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \sum_i \frac{\mathbb{P}\{A_i \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \sum_i \mathbb{P}\{A_i|B\}.$$

Кроме того, отметим также и другие интересные свойства условной вероятности:

4) если $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{B\}} \geqslant \mathbb{P}\{A\}$;

5) если $B \subseteq A$, то $\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = 1$;

6) для любого набора событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ такого, что $\mathbb{P}\{A_2 \cap \ldots \cap A_n\} > 0$, выполняется

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right\} = \mathbb{P}\left\{A|\bigcap_{i=2}^{n} A_i\right\}\mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=2}^{n} A_i\right\} = \ldots = \left(\prod_{k=1}^{n-1}\mathbb{P}\left\{A_k|\bigcap_{i=k+1}^{n} A_i\right\}\right)\mathbb{P}\{A_n\};$$

7) если события A и B независимы, то

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \mathbb{P}\{A\};$$

8) если $0 < \mathbb{P}\{B\} < 1$ и $\mathbb{P}\{A|B\} = \mathbb{P}\{A|\overline{B}\}$, то A и B независимы: действительно, из равенства указанных условных вероятностей следует

$$\frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap \overline{B}\}}{\mathbb{P}\{\overline{B}\}} = \frac{\mathbb{P}\{A\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}}{1 - \mathbb{P}\{B\}},$$
$$\mathbb{P}\{A \cap B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}\mathbb{P}\{B\},$$
$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\};$$

Рассмотрим теперь в качестве нового пространства элементарных исходов множество B. Можно показать, что семейство $\mathcal{F}_B \stackrel{\text{def}}{=} \{A \cap B \mid A \in \mathcal{F}\}$ является σ-алгеброй на множестве B, а условная вероятность $\mathbb{P}_B\{A\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{A|B\}$ является вероятностной мерой на этом пространстве, что следует из доказанных нами свойств. Тройка $(B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}_B)$ называется **условным вероятностным пространством**.

Как функция от B условная вероятность удовлетворяет так называемой **формуле полной вероятности**. Пусть $\{B_1, B_2, \ldots\}$ — конечное или счётное разбиение пространства Ω, т. е. $B_i \cap B_j = \varnothing$ при $i \neq j$ и $\bigcup\limits_i B_i = \Omega$. Не умаляя общности, предположим, что $\mathbb{P}\{B_i\} > 0$ при всех i. Тогда для любого события $A \in \mathcal{F}$ выполняется соотношение

$$\mathbb{P}\{A\} = \sum_i \mathbb{P}\{A \cap B_i\} = \sum_i \mathbb{P}\{A|B_i\}\mathbb{P}\{B_i\},$$

которое и называется **формулой полной вероятности**.

В математической статистике события B_i часто называют гипотезами, а вероятности $\mathbb{P}\{B_i\}$ — *априорными вероятностями* (т.е. заданными до опыта). Предположим, что в результате эксперимента осуществилось событие A, и мы хотим на основании этого решить, какая из гипотез B_i наиболее правдоподобна. Оценка делается путём вычисления *апостериорных вероятностей* $\mathbb{P}\{B_k|A\}$ (полученных в результате опыта):

$$\mathbb{P}\{B_k|A\} = \frac{\mathbb{P}\{B_k \cap A\}}{\mathbb{P}\{A\}} = \frac{\mathbb{P}\{A|B_k\}\mathbb{P}\{B_k\}}{\sum\limits_i \mathbb{P}\{B_i\}\mathbb{P}\{A|B_i\}}.$$

Это равенство называется **формулой Байеса**.

Упражнение 4. (Задача №50, про мужика) Пусть некоторый мужик говорит правду с вероятностью 75% и лжёт с вероятностью 25%. Он подбрасывает симметричную кость и говорит, что «выпала 6». С какой вероятностью выпала 6?

Решение. Зададим следующие события: $A = \{\text{выпала } 6\}, B = \{\text{мужик сказал, что «выпала 6»}\}$. Тогда в задаче нас просят найти $\mathbb{P}\{A|B\}$. Кроме того, из условия задачи мы знаем, что $\mathbb{P}\{B|A\} = \frac{3}{4}$ и $\mathbb{P}\{B|\overline{A}\} = \frac{1}{4}$. Воспользуемся формулой Байеса для события B относительно разбиения $A, \overline{A}$:

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{B|A\} \cdot \mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{B|A\}\mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B|\overline{A}\}\mathbb{P}\{\overline{A}\}} = \frac{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{6}} = \frac{3}{8}.$$

□

Упражнение 5. (Задача №47, парадокс Монти Холла) Представьте, что вы стали участником игры, в которой находитесь перед тремя дверями. Ведущий поместил за одной из трех пронумерованных дверей автомобиль, а за двумя другими дверями — по козе (козы тоже пронумерованы) случайным образом — это значит, что все $3! = 6$ вариантов расположения автомобиля и коз за пронумерованными дверями равновероятны. У вас нет никакой информации о том, что за какой дверью находится. Ведущий говорит: "Сначала вы должны выбрать одну из дверей. После этого я открою одну из оставшихся дверей (при этом если вы выберете дверь, за которой находится автомобиль, то я с вероятностью $1/2$ выберу дверь, за которой находится коза номер 1, и с вероятностью $1 - 1/2 = 1/2$ дверь, за которой находится коза номер 2). Затем я предложу вам изменить свой первоначальный выбор и выбрать оставшуюся закрытую дверь вместо той, которую вы выбрали сначала. Вы можете последовать моему совету и выбрать другую дверь либо подтвердить свой первоначальный выбор. После этого я открою дверь, которую вы выбрали, и вы выиграете то, что находится за этой дверью." Вы выбираете дверь номер 3. Ведущий открывает дверь номер 1 и показывает, что за ней находится коза. Затем ведущий предлагает вам выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы последуете его совету?

Решение. Казалось бы, какая разница, какую дверь выбирать в таком случае: дверей 2 и за одной из них автомобиль, значит, автомобиль за дверью 3 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Оказывается, что выгоднее последовать совету ведущего, что для многих людей контринтуитивно. Изначально для нас автомобиль находится за каждой дверью равновероятно. Но когда ведущий показывает, что за одной из невыбранных дверей находится коза, ситуация меняется. Действительно, если мы не поменяем выбор, то вероятность того, что автомобиль находится за дверью номер 3, будет равняться $\frac{1}{3}$, так как это эквивалентно ситуации, когда нам сразу открыли нашу дверь. Ключевая идея: *ведущий всегда открывает дверь с козой.* Вероятность того, что автомобиль находится за дверью 1 или 2 равна $\frac{2}{3}$. Но когда нам показали, что за второй дверью находится коза, эта вероятность не изменилась

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\text{за дверью 1 или 2 автомобиль} \mid \text{за одной из дверей 1 или 2 коза}\} &= \tfrac{2}{3} \\ &= \mathbb{P}\{\text{за дверью 1 или 2 автомобиль}\} \\ &= \mathbb{P}\{\text{за оставшейся дверью среди 1 и 2 автомобиль}\},\end{aligned}$$

где последняя вероятность — это как раз и есть вероятность того, что мы выберем дверь, за которой находится автомобиль, если сменим выбор двери. Таким образом, если менять выбор, то с вероятностью $\frac{2}{3}$ мы выиграем автомобиль, а если не менять — то с вероятностью $\frac{1}{3}$. □

Упражнение 6. Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, извлекается наугад один шар и откладывается в сторону. Какова вероятность того, что извлеченный наугад второй шар окажется белым, если:

(a) первый извлеченный шар белый;

(b) цвет первого извлеченного шара остается неизвестным?

Решение. (a) Пусть событие $A = \{\text{первый извлечённый шар белый}\}$ и событие $B = \{\text{второй извлечённый шар белый}\}$. Тогда нас просят найти $\mathbb{P}(B|A)$. Легко видеть, что $\mathbb{P}(B|A) = \frac{a-1}{a+b-1}$, так как нужно выбрать среди оставшихся $a + b - 1$ шаров один белый шар, которых осталось $a - 1$.

(b) Если цвет первого шара неизвестен, то нужно найти $\mathbb{P}(B)$. Пользуемся формулой полной вероятности:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) \cdot \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A}) \cdot \mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{a-1}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{a(a+b-1)}{(a+b-1)(a+b)} = \frac{a}{a+b}.$$

□